

Winkelverteilungen energiereicher geladener Teilchen
und die Streueigenschaften des interplanetaren Mediums

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

vorgelegt von
Roman Hatzky

Kiel

Oktober 1996

2., überarbeitete Auflage

Vorwort zur zweiten Auflage

Mit dem zeitlichen Abstand von nunmehr vierzehn Jahren habe ich meine Dissertation noch einmal gründlich durchgesehen. Ich habe dies zum Anlaß genommen, mir bekannte Tippfehler zu korrigieren und einige sprachliche Glättungen vorzunehmen.

Eine Überarbeitung fand in dem Abschnitt 6.3.2.2 statt, der sich mit der Interpretation der aus den gemessenen Pitchwinkelverteilungen abgeleiteten asymmetrischen Pitchwinkeldiffusionskoeffizienten beschäftigt. Als Konsequenz ergab sich eine Aufspaltung, aus der der neue Abschnitt 6.4 über die Folgerungen in Bezug auf das verwendete Ausbreitungsmodell hervorgegangen ist. Eine entsprechende Anpassung der Zusammenfassung wurde vorgenommen.

Ich danke Dr. Joachim Schmidt für die Erteilung einer Reproduktionserlaubnis für die Abbildung 6.10.

Garching, im März 2011

R. Hatzky

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Grundlagen	9
1.1 Definition physikalischer Begriffe und Größen	9
1.1.1 Der Pitchwinkel	9
1.1.2 Die differentielle Intensität	10
1.1.3 Die Anisotropie	11
1.2 Das Meßinstrument	12
1.3 Die Pitchwinkelverteilung	14
1.3.1 Winkelverteilungen	14
1.3.2 Die Symmetrieachse	14
1.4 Der Meßprozeß	21
1.5 Die mathematische Beschreibung der PWVs	22
2 Die Transportgleichung	25
2.1 Die physikalische Bedeutung der Transportgleichung	25
2.1.1 Die systematischen Kräfte	25
2.1.2 Der Diffusionsterm	27
2.1.3 Bezug zur radialen Diffusion	33
2.2 Mathematische Betrachtung der Transportgleichung	34
2.2.1 Die einzelnen Terme der Transportgleichung	34
2.2.2 Die stationäre Lösung: $\partial f/\partial t = 0$	38
2.2.3 Das steady-state-Theorem	40
2.2.4 Die Transportgleichung in konservativer Form	42
2.3 Analytische Näherungslösungen der Transportgleichung	44
2.4 Numerische Näherungslösungen der Transportgleichung	45
3 Das Differenzenverfahren	47
3.1 Die Anforderungen an das Differenzenverfahren	47
3.2 Die Approximation durch finite Differenzen	48
3.2.1 Der s -Transport	49
3.2.1.1 Die Diskretisierung	49
3.2.1.2 Die innere und äußere Grenze	58
3.2.2 Der μ -Transport	61
3.2.3 Das zeitliche Aufspaltungsschema	71
3.2.4 Die Injektionsfunktion	74

3.3	Die Berechnung der stationären Lösung	76
3.4	Test des Computerprogramms GREF	81
3.4.1	Test anhand von Spezialfällen der Transportgleichung	82
3.4.2	Überprüfung der Gültigkeit des steady-state-Theorems	84
3.4.3	Überprüfung durch ein weiteres Differenzenverfahren	86
4	Die erweiterte Transportgleichung	93
4.1	Die Verteilungsfunktion $F(t, s, \mu', p')$	93
4.2	Die Bezugssysteme	94
4.2.1	Definition der Bezugssysteme	94
4.2.2	Die Compton-Getting-Transformation	96
4.3	Die Konvektion	98
4.4	Die adiabatische Dezeleration	102
4.5	Das erweiterte Differenzenverfahren	107
4.5.1	Der erweiterte s -Transport	109
4.5.2	Der p' -Transport	111
4.5.2.1	Die Diskretisierung	111
4.5.2.2	Die äußere Grenze	114
4.5.3	Test des Computerprogramms NGRF	115
4.6	Ausgewählte Lösungen	118
4.6.1	Die zeitabhängigen Lösungen	118
4.6.2	Die stationären Lösungen	125
4.6.2.1	Die stationären Anisotropien ξ_{ns}	125
4.6.2.2	Das Potenzspektrum	132
4.7	Auswirkung der erweiterten Transportgleichung	133
5	Eigenschaften der Lösungen	135
5.1	Die diffusive Näherung für inhomogene Magnetfelder	135
5.2	Die lokalen und globalen Legendre-Koeffizienten	137
5.2.1	Der Produktansatz des Pitchwinkelstreuoeffizienten	142
5.2.2	Die lokale und die globale mittlere freie Weglänge	145
5.3	Die Näherung der stationären Transportgleichung	149
5.3.1	Die Eigenschaften der normierten Verteilungsfunktion	153
5.3.2	Der PWSK des Standardmodells	156
5.3.3	Das "resonance gap" und die M_{ns} -Koeffizienten	157
5.4	Die Näherung der zeitabhängigen Transportgleichung	162
6	Die Auswertung der Meßdaten	168
6.1	Die Bestimmung von Zeitreihen der Ausbreitungsparameter	168
6.2	Die Bestimmung der globalen mittleren freien Weglänge	173
6.2.1	Die herkömmliche Methode des Fittens	173
6.2.2	Bestimmung von λ_r aus den stationären Anisotropien ξ_{1s}	175
6.2.3	Ergebnisse	178
6.2.3.1	Vergleich mit den Ergebnissen des Fit-Verfahrens	178
6.2.3.2	Die radiale Abhängigkeit	180
6.2.3.3	Die absoluten Werte der radialen mittleren freien Weglänge	181

6.2.3.4	Die Steifigkeitsabhängigkeit	183
6.3	Die Bestimmung der \hat{q} - und $\hat{\sigma}$ -Parameter	185
6.3.1	Der \hat{q} -Parameter	191
6.3.1.1	Vergleich mit publizierten Ergebnissen	193
6.3.1.2	Bedeutung für die theoretischen Modelle	194
6.3.2	Der $\hat{\sigma}$ -Parameter	196
6.3.2.1	Vergleich mit publizierten Ergebnissen	199
6.3.2.2	Folgerungen in Bezug auf das Ausbreitungsmedium	199
6.4	Folgerungen in Bezug auf das Ausbreitungsmodell	202
6.4.1	Die Wahl der Ausbreitungsbedingungen	202
6.4.2	Die Wahl der Transportgleichung	204
7	Zusammenfassung	206
A	Die Berechnung von $G(\mu)$	211
B	Die stetige Differenzierbarkeit von f	215
C	Stabilität des μ-Transportes	218
D	Die stationäre Anisotropie ξ_{1s}	222
E	Die solaren Ereignisse	227
E.1	22. Dezember (doy 356) 1974 HELIOS 1	227
E.2	25. Dezember (doy 359) 1974 HELIOS 1	228
E.3	28. Juli (doy 209) 1975 HELIOS 1	228
E.4	1. August (doy 213) 1975 HELIOS 1	228
E.5	28. März (doy 88) 1976 HELIOS 2	228
E.6	30. April (doy 121) 1976 HELIOS 2	229
E.7	6. Dezember (doy 340) 1977 HELIOS 2	229
E.8	13. Februar (doy 44) 1978 HELIOS 1	229
E.9	11. April (doy 101) 1978 HELIOS 1	230
E.10	11. April (doy 101) 1978 HELIOS 2	230
E.11	23. Mai (doy 143) 1979 HELIOS 1	230
E.12	27. Oktober (doy 300) 1979 HELIOS 1	230
E.13	27. Oktober (doy 300) 1979 HELIOS 2	231
E.14	27. November (doy 331) 1979 HELIOS 2	231
E.15	19. Dezember (doy 353) 1979 HELIOS 1	231
E.16	25. März (doy 85) 1980 HELIOS 1	231
E.17	26. April (doy 117) 1980 HELIOS 1	232
E.18	21. Mai (doy 142) 1980 HELIOS 1	232
E.19	28. Mai (doy 149) 1980 HELIOS 1	232
E.20	21. Juni (doy 173a) 1980 HELIOS 1	233
E.21	21. Juni (doy 173b) 1980 HELIOS 1	233
E.22	6. August (doy 219) 1980 HELIOS 1	233
E.23	10. Juni (doy 161) 1981 HELIOS 1	234
E.24	18. Juni (doy 169) 1981 HELIOS 1	234

E.25 19. November (doy 323) 1981 HELIOS 1	234
E.26 20. November (doy 324) 1981 HELIOS 1	235
E.27 5. Dezember (doy 339) 1981 HELIOS 1	235
E.28 3. Februar (doy 34) 1983 HELIOS 1	235
Literaturverzeichnis	236

Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist es, die Ausbreitung der energiereichen geladenen Teilchen in den elektromagnetischen Feldern des interplanetaren Raumes zu untersuchen und daraus Rückschlüsse auf die Streueigenschaften des interplanetaren Mediums in der inneren Heliosphäre zu ziehen. Die für diese Untersuchungen herangezogenen in-situ-Messungen wurden mit Experimenten durchgeführt, die von Satelliten, welche als Meßplattformen dienen, in den interplanetaren Raum getragen wurden. Dabei sind besonders die Messungen des Kieler Experiments zur *Kosmischen Strahlung* auf den HELIOS-Satelliten von Bedeutung.

Die Kosmische Strahlung ist zuerst von GOCKEL (1910–1911) und dann von HESS (1911–1912) als sogenannte Höhenstrahlung mit Ballonexperimenten in der Erdatmosphäre gemessen worden. HESS fiel dabei auf, daß die Intensität der Höhenstrahlung mit der Höhe zunimmt. Heutzutage ist bekannt, daß es sich bei der von HESS gemessenen Höhenstrahlung um die Sekundärstrahlung der Kosmischen Strahlung handelt, die entsteht, wenn die Primärstrahlung auf die Erdatmosphäre trifft und es zu vielfältigen Wechselwirkungen kommt. Ist man also an der unverfälschten Primärstrahlung interessiert, dann muß man die Messungen außerhalb der Erdatmosphäre durchführen.

Die von dem Kieler Experiment gemessenen energiereichen geladenen Teilchen (Elektronen, Protonen und α -Teilchen) haben Energien, die im MeV-Bereich ($eV = \text{Elektronenvolt}$) liegen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die sogenannte *solare Komponente der Kosmischen Strahlung*, die aus Teilchen besteht, welche von der Sonne kommen und in der hohen Sonnenkorona oder bei Wechselwirkungsprozessen im interplanetaren Raum beschleunigt werden. Im Gegensatz dazu gibt es noch die sehr energiereiche *galaktische Kosmische Strahlung*, welche Energien von bis zu 10^{15} MeV erreichen kann und ihren Ursprung außerhalb unseres Sonnensystems hat.

Die hier zu untersuchende solare Komponente der Kosmischen Strahlung darf nicht mit dem *Sonnenwind* verwechselt werden, der sich aus Teilchen zusammensetzt, die radial von der Sonne abströmen. Diese Teilchen haben ihren Ursprung in der hydrodynamischen Expansion der Korona der Sonne (siehe PARKER [1958]), wo das Plasma stark aufgeheizt und dadurch auf so hohe Energien beschleunigt wird, daß es in den interplanetaren Raum abströmen kann. Typisch sind dabei zwei Sonnenwindströme: der "langsame" Sonnenwind (mit Geschwindigkeiten von 300 km/s bis 400 km/s), der bevorzugt aus den äquatorialen Regionen der Sonne abströmt, und der "schnelle" Sonnenwind (500 km/s bis 800 km/s), der bevorzugt aus den polaren Regionen entweicht (vgl. SCHWENN [1991]). Da die Teilchen des Sonnenwindes im Koordinatensystem der Ekliptik in guter Näherung radial nach außen strömen und sich die Sonne gemäß ihrer Winkelgeschwindigkeit ω_s weiterdreht, liegen die von einem bestimmten Ort auf der Sonne nacheinander gestarteten Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt auf einer *Archimedischen Spirale*. Beim Abströmen in den interplanetaren Raum trägt der

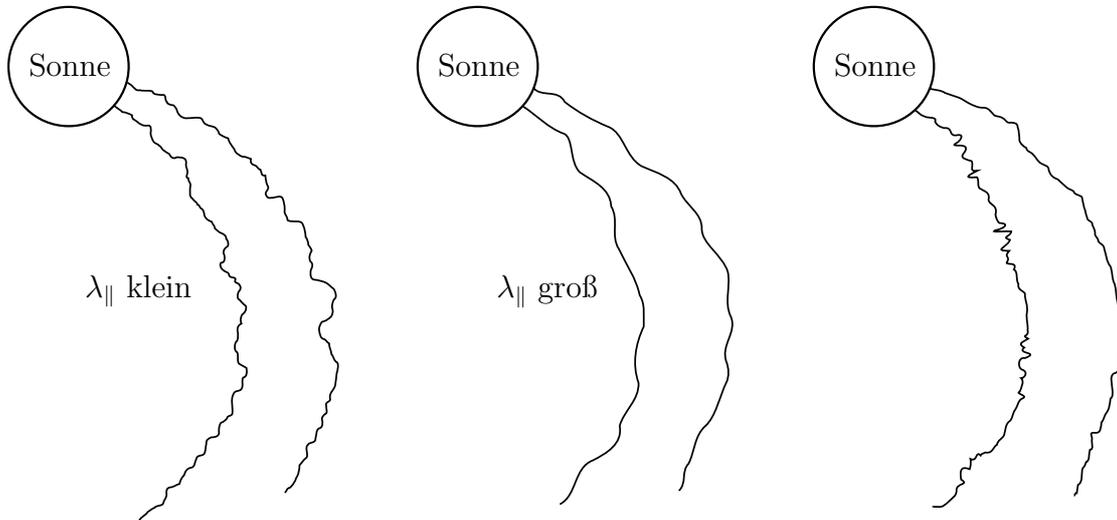


Abbildung 1: Verschiedene Situationen für die Teilchenausbreitung entlang der Archimedischen Spirale des mittleren Magnetfeldes mit überlagerten Magnetfeldfluktuationen unterschiedlicher Stärke sind dargestellt: starke Streuung (links), schwache Streuung (Mitte) und abwechselnd schwache und starke Streuung (rechts) (nach WIBBERENZ [1991], S. 57).

Sonnenwind Feldlinien des Sonnenmagnetfeldes mit sich (magnetohydrodynamisches Prinzip der eingefrorenen Magnetfeldlinien), so daß das interplanetare Magnetfeld nahe der Ebene der Ekliptik die Form eines durch einen rotierenden Rasensprenger geformten Wasserstrahls annimmt (Archimedische Spirale).

Entlang dieses mittleren Magnetfeldes breiten sich nun die Teilchen der solaren Komponente der Kosmischen Strahlung aus und treten dabei in Wechselwirkung mit den dem mittleren Magnetfeld überlagerten *Magnetfeldfluktuationen*. Diese Wechselwirkung kann in idealisierter Weise als diffusiver Prozeß beschrieben werden, da die Teilchen an den Magnetfeldfluktuationen “gestreut” werden können. Führt man eine mittlere freie Weglänge $\lambda_{||}$ ein, so kann man je nach Stärke der Magnetfeldfluktuationen unterschiedliche Fälle voneinander unterscheiden. Ist die Stärke der Magnetfeldfluktuationen groß, d. h. die mittlere freie Weglänge $\lambda_{||}$ klein, dann kann man sich die Struktur des Magnetfeldes wie in Abbildung 1 (links) vorstellen. Der entgegengesetzte Fall ist in der Mitte der Abbildung 1 zu erkennen: Die Magnetfeldfluktuationen sind schwach, die mittlere freie Weglänge ist somit groß. Schließlich ist noch als dritter Fall denkbar, daß sich Bereiche starker Streuung mit solchen schwacher Streuung abwechseln. Dies kann sowohl innerhalb einer Flußröhre als auch zwischen zwei verschiedenen Flußröhren geschehen (siehe Abbildung 1 (rechts)).

Da die Teilchen entlang der in Abbildung 1 eingezeichneten Magnetfeldlinien fliegen, kann man sie als Sonden verwenden, um die Eigenschaften des Ausbreitungsmediums zwischen Quelle und Beobachter zu erforschen. Ein einziges Teilchen wäre dabei wenig hilfreich; betrachtet man jedoch die gemessene differentielle Intensität der Teilchen, so erhält man unter anderem Information über die Winkelverteilung und kann daraus Rückschlüsse auf die Streueigenschaften des Ausbreitungsmediums ziehen. Dazu vergleicht man die gemessenen

Winkelverteilungen mit den Winkelverteilungen, die man aus einem theoretischen Ausbreitungsmodell für vorgegebene Ausbreitungsbedingungen erhält.

Leider ist dieses theoretische Ausbreitungsmodell in Form einer partiellen Differentialgleichung (PDGl) formuliert, deren Lösungen für allgemeine Ausbreitungsbedingungen nicht bekannt sind. Aus diesem Grund müssen die Lösungen der PDGl auf numerischem Wege berechnet werden. Die hier zu lösende PDGl ist jedoch schon recht kompliziert, so daß große Sorgfalt auf die numerischen Lösungsmethoden verwendet werden muß, da von der Approximationsgenauigkeit der numerischen Lösungen die physikalische Interpretation der gemessenen Winkelverteilungen unmittelbar abhängig ist. In diesem Zusammenhang stellt sich die prinzipielle Frage, welche Information bezüglich der Ausbreitungsbedingungen aus den durch den Meßprozeß nur eingeschränkt zu ermittelnden Winkelverteilungen überhaupt gewonnen werden kann.

Betrachtet man die theoretischen Streumodelle, die aus den gemessenen Magnetfeldfluktuationen die mittlere freie Weglänge λ_{TH} vorhersagen, so ergibt sich zu der aus den gemessenen Winkelverteilungen der Teilchen bestimmten mittleren freien Weglänge λ_{FIT} eine Diskrepanz. Dabei ergeben sich im wesentlichen drei Probleme (siehe BIEBER ET AL. [1994]; DRÖGE [1994]):

1. Es existiert eine Diskrepanz von im Mittel einem Faktor 10 zwischen λ_{TH} und λ_{FIT} bei ≈ 20 MeV-Protonen (magnitude-problem).
2. Eine realistische Streutheorie muß nicht nur systematisch größere Werte von λ_{TH} liefern, sondern auch die Beobachtung erklären, daß bei manchen solaren Ereignissen¹ gar keine und bei anderen eine Diskrepanz von bis zu einem Faktor von 20 bis 30 zwischen den Werten von λ_{TH} und λ_{FIT} auftritt (variance-problem).
3. Die Steifigkeitsabhängigkeit (Steifigkeit = Impuls pro Ladung) der mittleren freien Weglänge bei Elektronen und Protonen muß korrekt beschrieben werden (flatness-problem).

Da die theoretischen Streumodelle nicht nur die mittlere freie Weglänge berechnen, sondern auch die Abhängigkeit der Streuung von dem eingeschlossenen Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung des Teilchens und der Richtung des Magnetfeldes (Pitchwinkel), ist es besonders interessant, die Form dieses sogenannten Pitchwinkelstreukoeffizienten (PWSK) aus den gemessenen Winkelverteilungen zu bestimmen.

In dieser Arbeit soll nicht versucht werden, das oben genannte Diskrepanzenproblem zu lösen — dies kann nur durch die Modifikation der theoretischen Streumodelle geschehen; es geht vielmehr darum, zusätzliche Information aus den gemessenen Winkelverteilungen zur Verfügung zu stellen. Mit den aus den Messungen der Winkelverteilungen bestimmten PWSKs sollte es möglich sein, verschiedene theoretische Streumodelle zu bestätigen bzw. auszuschließen. Inwieweit jedoch die durch den Meßprozeß nur begrenzt bestimmbar Winkelverteilungen dies gestatten, bleibt zu überprüfen.

¹Die Teilchen der solaren Komponente der Kosmischen Strahlung werden nicht kontinuierlich in der hohen Sonnenkorona erzeugt, sondern besonders bei sogenannten solaren Ereignissen beschleunigt, die am Meßort in der Regel zu einer ausreichenden Zählstatistik führen, so daß die Auswertung der Winkelverteilungen nur während der solaren Ereignisse stattfinden kann.

Besonderer Wert wird in dieser Arbeit darauf gelegt, eine Methode zu entwickeln, die einerseits keine analytischen Näherungslösungen der PDGI des theoretischen Ausbreitungsmodells verwendet, andererseits aber trotzdem eine effiziente Bestimmung der mittleren freien Weglänge und der Form des PWSK gestattet. Die hier gemachten Aussagen über die Streueigenschaften des interplanetaren Mediums sollen sich dabei auf die Auswertung möglichst vieler solarer Ereignisse stützen, damit statistische Aussagen möglich sind.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Definition physikalischer Begriffe und Größen

1.1.1 Der Pitchwinkel

Das einfachste Bild, welches man sich von einem Plasma machen kann, besteht in der Vorstellung, daß die einzelnen Plasmateilchen unabhängig voneinander den Wirkungen vorgegebener elektrischer und magnetischer Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} ausgesetzt sind und durch ihre Bewegungen diese Felder nicht beeinflussen (Einteilchenbild). Dies trifft auf die hochenergetischen Teilchen der Kosmischen Strahlung wegen ihrer geringen Teilchendichte im allgemeinen zu. Die Bewegungsgleichung einer Ladung im elektromagnetischen Feld lautet

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

mit \mathbf{p} = Impulsvektor des Teilchens
 \mathbf{v} = Geschwindigkeitsvektor des Teilchens
 q = Ladung des Teilchens

Vernachlässigt man das elektrische Feld, so ergibt sich für den Spezialfall eines statischen homogenen Magnetfeldes und einer Teilchenbewegung senkrecht zum Magnetfeld eine Kreisbahn mit dem Gyrationradius r_{Gyr} . Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v}_{Gyr} liegt dabei immer tangential zum Kreis und bleibt vom Betrag her konstant. Überlagert sich dieser Kreisbewegung eine Geschwindigkeitskomponente \mathbf{v}_{\parallel} parallel zum Magnetfeld, so wird aus der Kreisbahn eine schraubenförmige (helixförmige) Bewegung um die Magnetfeldlinie. Für das statische homogene Magnetfeld läßt sich somit die Teilchengeschwindigkeit v allgemein in die beiden Komponenten

$$v_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\vartheta) \cdot v \quad \text{und} \quad v_{\text{Gyr}} \stackrel{\text{def}}{=} \sin(\vartheta) \cdot v \quad (1.2)$$

zerlegen; der eingeschlossene Winkel ist der *Pitchwinkel* ϑ (Anstellwinkel). Allgemein kann der Pitchwinkel folgendermaßen definiert werden:

Der Pitchwinkel ϑ ist der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsrichtungsvektor \hat{e}_v und dem Magnetfeldrichtungsvektor \hat{e}_B . Für das Skalarprodukt dieser Vektoren gilt

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\vartheta) = \hat{e}_v \cdot \hat{e}_B \quad (1.3)$$

wobei μ als *Pitchkosinus* bezeichnet wird.

Desweiteren ergibt sich für den *Gyrationsradius* r_{Gyr} des Teilchens

$$r_{\text{Gyr}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_{\text{Gyr}}}{qB} = \frac{p \sin(\vartheta)}{qB} \quad (1.4)$$

mit p = Betrag des relativistischen Impulses
 p_{Gyr} = Projektion des Impulses senkrecht zum Magnetfeld

und die *Gyrationsfrequenz* ω_{Gyr} des Teilchens

$$\omega_{\text{Gyr}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|q|B_0}{\gamma m_0} \quad (1.5)$$

mit B_0 = mittlere magnetische Flußdichte
 m_0 = Ruhemasse des Teilchens
 γ = Lorentz-Faktor

Betrachtet man die Trajektorie eines geladenen Teilchens im Magnetfeld, so ist diese nur von den Randbedingungen, dem Vorzeichen der Ladung und der *magnetischen Steifigkeit* P des Teilchens

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma m_0 v c}{|q|} = \frac{B_0 v c}{\omega_{\text{Gyr}}} \quad (1.6)$$

abhängig.¹ Wie schnell ein Teilchen eine bestimmte Trajektorie durchläuft, hängt allerdings von der Geschwindigkeit v ab. Die magnetische Steifigkeit wird in MV angegeben.

1.1.2 Die differentielle Intensität

Die Meßgröße, die durch die in-situ-Messungen im interplanetaren Raum gewonnen wird, ist die *differentielle*² *Intensität* I . Ihre Definition lautet:

$I(\mathbf{x}, E, \hat{n}, t) dE dt d\Omega d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{Zahl der Teilchen in dem Energieintervall von } E \text{ bis } E + dE, \text{ die im Zeitintervall von } t \text{ bis } t + dt \text{ aus der Richtung } \hat{n} \text{ einfallend den Raumwinkel } d\Omega \text{ und die darauf senkrechte Fläche } d\sigma \text{ an dem durch den Ortsvektor } \mathbf{x} \text{ festgelegten Raumpunkt durchsetzen.}$

$$\dim I = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Energie} \cdot \text{Zeit} \cdot \text{Raumwinkel} \cdot \text{Fläche}} \quad [I] = \frac{\text{Anzahl}}{\text{MeV} \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{cm}^2}$$

¹Daß die Lichtgeschwindigkeit c in dieser Definition vorkommt, ist ein Relikt aus der Zeit, in der es noch üblich war, die Lorentz-Kraft im Gaußschen Maßsystem anzugeben

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (1.7)$$

in dem die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die magnetische Flußdichte \mathbf{B} die gleiche Dimension haben.

²Das Adjektiv "differentiell" steht für die Eigenschaft, daß die Intensität in dem Energieintervall $[E, E + dE]$ zu messen ist.

Die Intensität ist somit von der Richtung \hat{n} abhängig und hat die Bedeutung einer Winkelverteilung. Mittelt man die Intensität über alle Richtungen, so erhält man die *omnidirektionale Intensität*

$$\bar{I}(\mathbf{x}, E, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\iint I(\mathbf{x}, E, \hat{n}, t) d\Omega}{\iint d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \iint I(\mathbf{x}, E, \hat{n}, t) d\Omega \quad (1.8)$$

Ist die differentielle Intensität unabhängig von der Richtung \hat{n} , so nennt man die Winkelverteilung *isotrop*, und es gilt $I(\hat{n}) = \bar{I}$ für alle \hat{n} .

Die *differentielle Teilchendichte* ist eine weitere Größe, die mit der differentiellen Intensität eng verbunden ist. Ihre Definition lautet:

$U_E(\mathbf{x}, E, t) dE d^3x \stackrel{\text{def}}{=} \text{Zahl der Teilchen aus dem Energieintervall von } E \text{ bis } E + dE, \text{ die sich gleichzeitig im durch den Ortsvektor } \mathbf{x} \text{ gekennzeichneten Volumenelement } d^3x \text{ befinden.}$

$$\dim U_E = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Energie} \cdot \text{Volumen}} \quad [U_E] = \frac{\text{Anzahl}}{\text{MeV} \cdot \text{cm}^3} \quad (1.9)$$

Die differentielle Teilchendichte U_E ist mit der differentiellen Intensität über folgende Gleichung verknüpft:

$$U_E(\mathbf{x}, E, t) = \frac{1}{v} \iint I(\mathbf{x}, E, \hat{n}, t) d\Omega \quad (1.10)$$

worin v die Teilchengeschwindigkeit bezeichnet.

1.1.3 Die Anisotropie

Bevor die Größe der Anisotropie eingeführt werden kann, ist noch die differentielle *Teilchenstromdichte* S_E zu definieren. Ihre Definition lautet:

$$\mathbf{S}_E(\mathbf{x}, E, t) dE dt d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} dE dt d\sigma \iint I(\mathbf{x}, E, \hat{n}, t) \hat{n} \cdot d\Omega \quad (1.11)$$

$$\dim \mathbf{S}_E = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Energie} \cdot \text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} \quad [\mathbf{S}_E] = \frac{\text{Anzahl}}{\text{MeV} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^2}$$

Die Teilchenstromdichte ist eine gerichtete Größe

$$\mathbf{S}_E(\mathbf{x}, E, t) = |\mathbf{S}_E(\mathbf{x}, E, t)| \cdot \hat{s}_0 \quad (1.12)$$

die im Fall einer anisotropen Verteilung einen Nettofluß von Teilchen in eine Vorzugsrichtung \hat{s}_0 anzeigt. Ist die Verteilung um eine Achse symmetrisch (z. B. eine gyrotrope Verteilung, die nur vom Pitchwinkel ϑ abhängt), so vereinfacht sich die Teilchenstromdichte zu:

$$\mathbf{S}_E(\mathbf{x}, E, t) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I(\mathbf{x}, E, \mu, t) \mu d\mu \cdot \hat{e}_B \quad (1.13)$$

Der Pitchkosinus μ projiziert dabei die differentielle Intensität auf die Richtung des Magnetfeldes \hat{e}_B , so daß die Teilchen entsprechend ihrer Geschwindigkeitskomponente $v_{||}$ entlang des Magnetfeldes zum Teilchenstrom beitragen.

Die *Anisotropie* \mathbf{A} einer Verteilung gibt nun ein Maß für das Verhältnis von gerichteter Strömung \mathbf{S}_E zu der Strömung, die man erhält, wenn sich alle Teilchen in einem Volumenelement der Teilchendichte U_E gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v/3$ bewegen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, E, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3|\mathbf{S}_E|}{vU_E} \cdot \hat{s}_0 \quad (1.14)$$

Die Anisotropie ist eine vektorielle Größe der Dimension 1. Ihr Betrag kann Werte zwischen null (isotrope Teilchenverteilung) und drei (vollständig gebündelte Teilchenströmung) annehmen.³

Für gyrotrope Verteilungen (siehe Abschnitt 1.3.1) nimmt die Anisotropie die Richtung des Richtungsvektors des Magnetfeldes \hat{e}_B an, da die geladenen Teilchen sich nur entlang der Magnetfeldlinie ausbreiten. Es ist daher üblich, die Anisotropie nur mit ihrem vorzeichenbehafteten Betrag anzugeben, wobei das Vorzeichen darüber Auskunft gibt, ob die Teilchen in Richtung des Magnetfeldes (+) oder entgegengesetzt dazu (–) strömen. Für gyrotrope Verteilungen, d. h. Pitchwinkelverteilungen, vereinfacht sich die Gleichung (1.14) zu:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, E, t) = 3 \frac{\int_{-1}^{+1} I(\mathbf{x}, E, \mu, t) \mu \, d\mu}{\int_{-1}^{+1} I(\mathbf{x}, E, \mu, t) \, d\mu} \cdot \hat{e}_B \quad (1.15)$$

1.2 Das Meßinstrument

Die Raumsonden HELIOS 1 (HELIOS A) und HELIOS 2 (HELIOS B), ein deutsch-amerikanisches Raumfahrtprojekt, wurden am 10.12.1974 bzw. am 15.01.1976 in elliptische Umlaufbahnen um die Sonne gebracht. Diese elliptischen Umlaufbahnen führten HELIOS 1 alle 190 Tage bis auf 0.31 AU und HELIOS 2 alle 185 Tage bis auf 0.29 AU an die Sonne heran (Perihel).⁴ In den sonnenfernsten Punkten der Umlaufbahnen (Aphel) betrug die Abstände 0.98 AU. Dabei lieferte HELIOS 1 bis 1986 und HELIOS 2 bis 1980 Messungen, womit die HELIOS-Satelliten weit über die zunächst geplante Missionsdauer funktionstüchtig waren und wertvolle Daten über die physikalischen Eigenschaften des interplanetaren Mediums im inneren Sonnensystem und zur direkten Beobachtung der Sonnenatmosphäre geliefert haben. Eine genaue Beschreibung aller Experimente befindet sich in der Zeitschrift RAUMFAHRTFORSCHUNG [1975], eine Beschreibung der wissenschaftlichen Ergebnisse bis etwa 1989 in SCHWENN AND MARSCH [1990, 1991]. Für diese Arbeit werden aber nur die Daten des Plasma-Experiments (E1) unter der Leitung von H. Rosenbauer und R. Schwenn, des Förstersonden-Magnetometers I (E2) unter der Leitung von G. Murmann und F. M. Neubauer und des Kieler Experiments zur Kosmischen Strahlung I (E6) unter der Leitung von

³Dabei ist es ohne Bedeutung, ob die Anisotropie der differentiellen Intensität oder der in Abschnitt 2.1 eingeführten Phasenraumdicke berechnet wird (vgl. GREEN [1992], S. 8f.).

⁴AU = astronomical unit bzw. AE = Astronomische Einheit: die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne. Die Astronomische Einheit ist 1976 von der Internationalen Astronomischen Union auf den Wert von 149 597 870 km $\approx 150 \cdot 10^6$ km festgelegt worden.

Kanal	Energiebereich (MeV/Nukleon)	Steifigkeit (MV)	ψ_1 ($^\circ$)	ψ_2 ($^\circ$)
E03	1	1.4	14.5	29
E08	2.5	3.0	14	28
P4	4 – 13	112	17	26
P13	13 – 27	187	17	26
P27	27 – 37	245	17	26
A2	2 – 4	138	17	26.5
A4	4 – 13	225	17	26
A13	13 – 27	371	17	26

Tabelle 1.1: Die sektorierten Energiekanäle des E6-Experiments, die in dieser Arbeit zur Auswertung kommen, sind mit ihren Energieschwerpunkten (Elektronen (E)) bzw. Energiebereichen (Protonen (P) und α -Teilchen (A)), mit ihrer Steifigkeit und ihren Empfindlichkeitsfunktionen (siehe Gleichung (1.16)) aufgelistet.

H. Kunow und G. Wibberenz verwendet. Die Experimente lieferten unter anderem die folgenden physikalischen Parameter, die für die Auswertung in dieser Arbeit von Bedeutung sind: die Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw} (E1), die Richtung des Magnetfeldes \hat{e}_B (E2) und die energiereiche Kosmische Strahlung in unterschiedlichen Energiebereichen (E6). Es handelt sich dabei um Elektronen, Protonen und α -Teilchen, die zum Teil eine Richtungsauflösung von acht Sektoren mit einer Breite von je 45° haben.

Das Detektorteleskop besteht aus fünf Halbleiterdetektoren und einem Saphir als Čerenkov-Detektor (siehe KUNOW ET AL. [1975, 1981]). Ein Antikoinzidenzszintillator, der den Detektor zylindrisch umgibt, wirkt als aktiver Kollimator. Er stellt sicher, daß Teilchen, die seitlich in das Detektorsystem einfallen, nicht weiter ausgewertet werden. Treffen die Teilchen jedoch von vorne auf den Detektor, so werden sie aufgrund des Energieverlustes und der daraus resultierenden Ladungen bzw. der Photonen, die im Čerenkov-Detektor induziert werden, ausgewertet. Die Blickrichtung des Detektorteleskops ist dabei senkrecht zur Spin-Achse und rotiert mit einer Umlaufperiode von einer Sekunde in der Ebene der Ekliptik. Grobe Energiebereiche, die sich durch die Dicke der Detektoren und Absorber ergeben, sind in Tabelle 1.1 für die Energiekanäle der Protonen und α -Teilchen angegeben. Die Energieschwerpunkte der Kanäle der Elektronen sind wegen der Vielfachstreuung der Elektronen mit Hilfe von numerischen Simulationen (siehe BIALK [1991], S. 134) bestimmt worden und weichen von den sich aus der Dicke der Detektoren ergebenden Werten ab. Die sich aus den Energiebereichen bzw. Energieschwerpunkten der einzelnen Kanäle ergebenden mittleren Steifigkeiten sind ebenfalls in der Tabelle aufgeführt. Desweiteren sind für jeden Energiekanal zwei Parameter ψ_1 und ψ_2 aufgeführt, die es gestatten, die vom Einfallswinkel ψ abhängige Empfindlichkeitsfunktion⁵ näherungsweise zu beschreiben. Die Empfindlichkeitsfunktion $g(\psi)$ wird dabei durch ein gleichschenkliges Trapez angenähert, dessen Symmetrieachse mit der Symmetrieachse des

⁵Die Empfindlichkeitsfunktion wurde für die Kanäle der Protonen und α -Teilchen aus der Geometrie des Detektorteleskops unter Verwendung der ‘‘Schattenmethode’’ (siehe SULLIVAN [1971]) analytisch bzw. numerisch berechnet. Für die Kanäle der Elektronen wurden hingegen numerische Simulationsberechnungen der Empfindlichkeitsfunktion verwendet (private Mitteilung von HEBER).

Detektorteleskops zusammenfällt:

$$g(\psi) = C \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \psi \leq \psi_1 \\ \frac{\psi_2 - \psi}{\psi_2 - \psi_1} & \text{für } \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.16)$$

Im folgenden Abschnitt werden die so angenäherten Empfindlichkeitsfunktionen für die Rekonstruktion der Pitchwinkelverteilungen aus den sektorierten Meßwerten benötigt.

Abschließend muß noch darauf hingewiesen werden, daß es zum Übersprechen der Protonen in die Elektronenkanäle und der Elektronen in die Protonenkanäle kommen kann. Die Stärke des Übersprechens ist dabei stark abhängig vom Verhältnis der Protonen zu den Elektronen bzw. der Elektronen zu den Protonen (Näheres hierzu siehe BIALK [1991]). Ist ein Übersprechen bei einem Ereignis offensichtlich, so wurde im Anhang E der solaren Ereignisse eine entsprechende Bemerkung vorgenommen.

1.3 Die Pitchwinkelverteilung

1.3.1 Winkelverteilungen

Die differentielle Intensität I ist im allgemeinen vom Höhenwinkel ϑ und vom Azimutwinkel φ abhängig. Nur unter der Annahme, daß die Teilchen gyrotrop um eine gemeinsame Achse gyrieren und daß das Koordinatensystem so gewählt wurde, daß die z -Achse mit der Gyrationssachse zusammenfällt, können Winkelverteilungen ausschließlich mit dem Höhenwinkel ϑ (Pitchwinkel) beschrieben werden. Die Bedeutung des Wortes *gyrotrop* liegt darin, daß die Teilchen in jedem Intervall $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ des Azimutwinkels gleich häufig anzutreffen sind. Diese Näherung ist zu rechtfertigen, da die stochastisch auftretenden Änderungen des Azimut- und des Pitchwinkels (siehe Abschnitt 2.1.2) zu einer gleichmäßigen Verteilung im Azimutwinkel φ führen. Dennoch gibt es auch Effekte, die einer gyotropen Winkelverteilung entgegenwirken. Dazu gehören der Compton-Getting-Effekt (siehe Abschnitt 4.2.2) und starke räumliche Gradienten sowohl der Teilchendichte als auch des Magnetfeldes. Für die hier betrachteten energiereichen Teilchen im inneren Sonnensystem sind diese Effekte jedoch gering, so daß im folgenden von gyotropen Verteilungen ausgegangen werden kann. Diese gyotropen Winkelverteilungen geben Information über die Häufigkeit, mit der ein bestimmter Pitchwinkel ϑ im Intervall $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ anzutreffen ist, und werden im allgemeinen als **Pitchwinkelverteilungen** (PWVs) bezeichnet.

1.3.2 Die Symmetrieachse

Betrachtet man zunächst die Sektorverteilung, d. h. die acht Meßwerte, die sich für die 45° breiten Sektoren ergeben, so können diese in einer Fourierreihe bzw. einem trigonometrischen Polynom entwickelt werden, so daß man eine kontinuierliche Umlaufwinkelverteilung $I(\alpha)$ erhält (siehe GREEN [1992], S. 9ff.; HATZKY [1993], S. 24ff.). Im idealisierten Fall gyotropen PWVs stimmen die Magnetfeldrichtung \hat{e}_B und die Symmetrieachse der PWVs überein, so daß auch die Projektion der Magnetfeldrichtung ξ und die der Symmetrieachse α_0 auf die Sektorebene übereinstimmen müssen. In der Praxis ist jedoch eine perfekte Symmetrie der PWVs nicht zu erwarten, so daß nur von einer Achse größter Symmetrie gesprochen werden soll, deren Projektion auf die Sektorebene durch den Winkel α_0 festgelegt ist. Möchte

man nun aus der durch ein trigonometrisches Polynom beschriebenen Umlaufwinkelverteilung die Achse größter Symmetrie ermitteln, so ist es sinnvoll, sich die Eigenschaft zunutze zu machen, daß der punktsymmetrische Anteil bezüglich einer beliebigen Achse α durch die Sinuskoeffizienten b_n beschrieben wird. Dieser punktsymmetrische Anteil ist im Gegensatz zum achsensymmetrischen Anteil nicht mit einer PWV in Einklang zu bringen. GREEN [1992], S. 17 und HATZKY [1993], S. 38, definieren daher ein Maß für die Unsymmetrie, das auf dieser Eigenschaft beruht:

$$U(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^M b_k^2(\alpha)}{a_0^2 + \sum_{k=1}^M (a_k^2(\alpha) + b_k^2(\alpha))}} \quad \text{mit } \alpha \in [0, 2\pi] \quad (1.17)$$

Wie man erkennt, ergibt sich für den Idealfall einer perfekten Symmetrie bezüglich einer Achse α_0 eine identisch verschwindende Unsymmetrie $U(\alpha_0) = 0$, da die b_n -Koeffizienten dann identisch verschwinden. Der aus der Summe der Quadrate der Kosinus- und Sinuskoeffizienten a_n und b_n bestehende Divisor dient zur Normierung der Unsymmetrie, so daß die Unsymmetrie U eine positive Größe mit dem Wertebereich $[0, 1]$ ist. Zudem ist sie in dem Intervall $\alpha \in [0, 2\pi]$ periodisch, da die Symmetrieachse keinen Richtungssinn aufweist. Mit Hilfe von Intervallschachtelung (siehe HATZKY [1993], S. 39ff.) kann man numerisch das globale Minimum der Unsymmetriefunktion $U(\alpha)$ und damit die Achse größter Symmetrie α_0 für eine vorgegebene Umlaufwinkelverteilung bestimmen.

Im folgenden wird anhand des solaren Ereignisses vom 8. Juni (doy⁶ 149) 1980 auf HELIOS 1 (siehe KALLENRODE AND WIBBERENZ [1991]) die Unsymmetrie $U(\alpha_0)$ und die Achse größter Symmetrie α_0 im zeitlichen Verlauf untersucht. Dieses Ereignis bietet sich aus verschiedenen Gründen für die Bestimmung dieser Größen an:

Zum einen sprechen technische Gründe dafür, da die Übertragungsrate in diesem Zeitraum sehr hoch ist, so daß die Sektorzählraten der einzelnen Kanäle in einer Zeitauflösung von 54 Sekunden vorliegen. Dies ist, verglichen mit der sonst üblichen Zeitauflösung der Daten von 15 Minuten sehr hoch.

Zum anderen sind aber auch sehr günstige physikalische Bedingungen zu verzeichnen. Der HELIOS 1-Satellit befindet sich bei einem radialen Abstand von nur 0.31 AU, so daß die PWVs, die, kurz nachdem die Teilchen in der unmittelbaren Umgebung der Sonne injiziert worden sind, von dem E6-Experiment gemessen werden (Anfangsphase des solaren Ereignisses) sehr gebündelt sind (eine Erklärung hierfür wird in Kapitel 2 gegeben).

Ein weiterer günstiger Umstand ist die Tatsache, daß es sich um insgesamt vier Injektionen handelt, die innerhalb von einigen Stunden von einem aktiven Gebiet auf der Sonne in den interplanetaren Raum entlassen werden. Drei dieser Injektionen sind so teilchenreich, daß der statistische Fehler der Zählraten der Energiekanäle E03 (Abbildung 1.1), P4 (Abbildung 1.2) und A2 (Abbildung 1.3) so gering ist, daß die Unsymmetrie $U(\alpha_0)$ und die Achse größter Symmetrie α_0 trotz der hohen Zeitauflösung der PWVs mit einem geringen statistischen Fehler berechnet werden können. Es werden im folgenden nur die PWVs ausgewertet, deren statistische Fehler der Achse größter Symmetrie kleiner sind als 1.75° . Dieses Kriterium wurde gewählt, damit die zeitlichen Schwankungen, die man in der Unsymmetrie $U(\alpha_0)$ (oberer Teil der Abbildungen 1.1–1.3) und der Achse größter Symmetrie α_0 (mittlerer Teil der

⁶doy = day of year

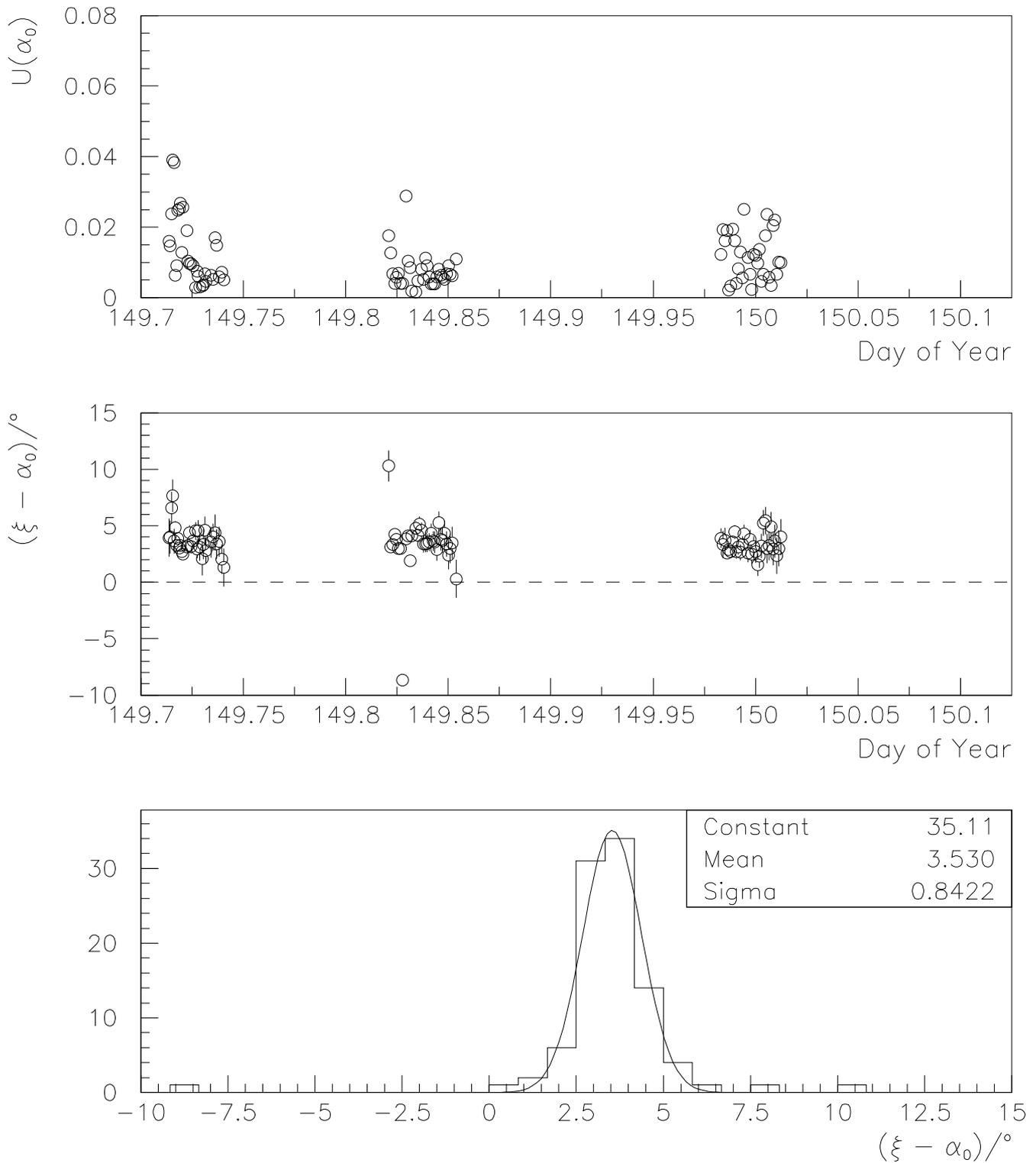


Abbildung 1.1: Die Unsymmetrie $U(\alpha_0)$ für die Achse größter Symmetrie α_0 der Umlaufwinkelverteilung $I(\alpha)$ ist für Elektronen des E03-Kanals vom 8. Juni (doy 149) 1980 auf HELIOS 1 im oberen Teil der Abbildung über der Zeit aufgetragen. Im mittleren Teil ist der Differenzwinkel zwischen der auf die Sektorebene projizierten Magnetfeldrichtung ξ und der Achse größter Symmetrie α_0 über der Zeit aufgetragen. Die dazugehörige Verteilung des Differenzwinkels $\xi - \alpha_0$ ist im unteren Teil der Abbildung zu sehen.

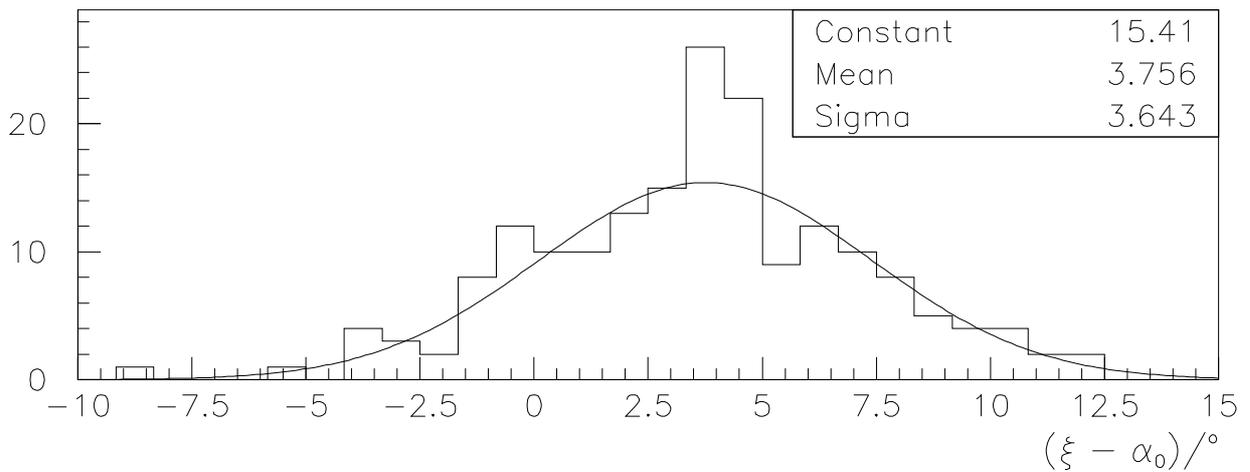
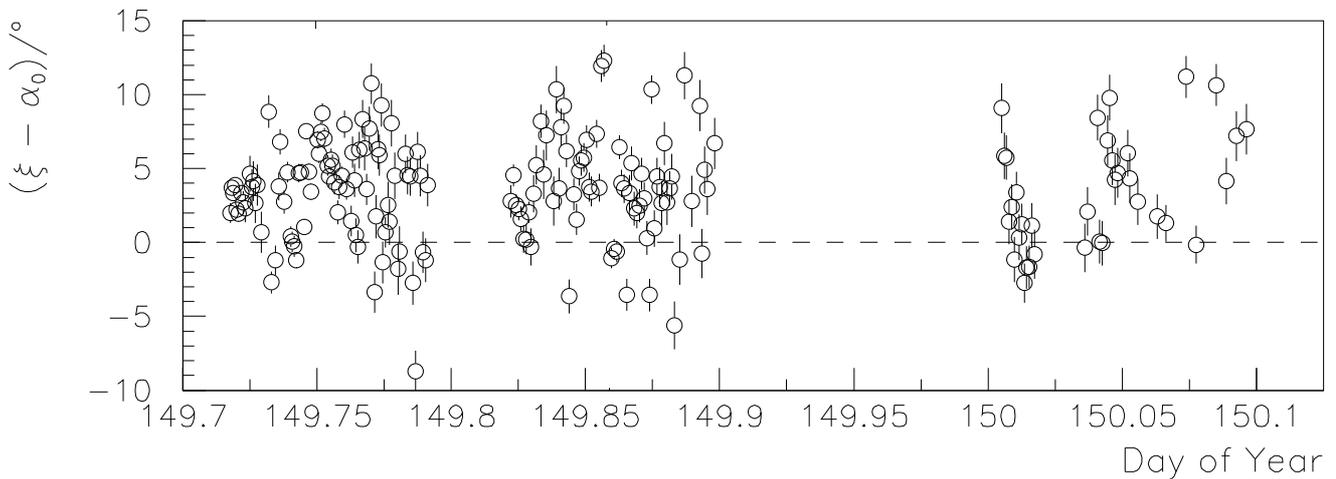
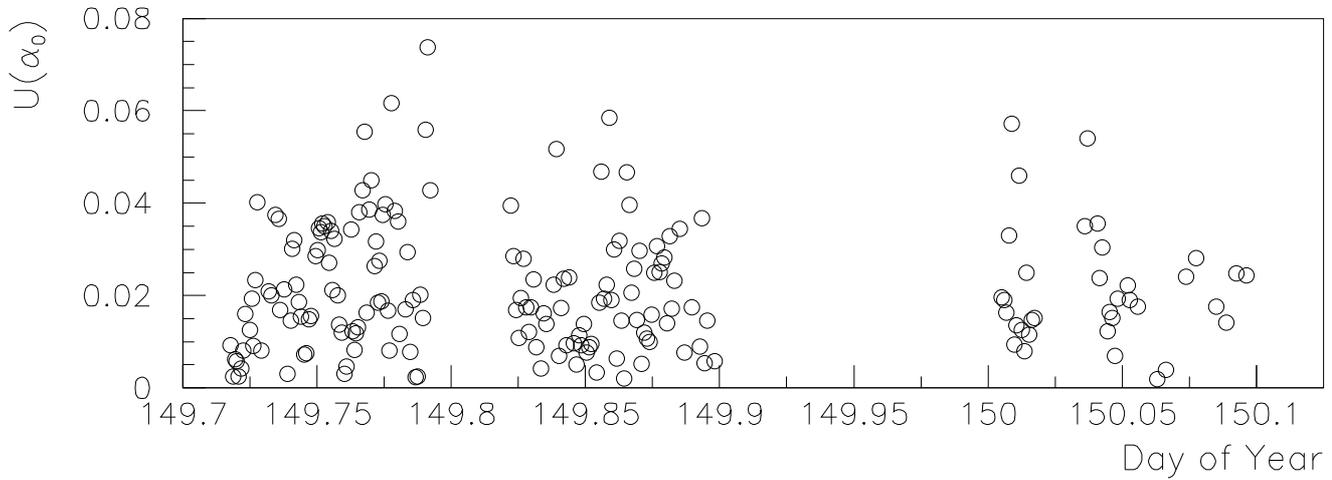


Abbildung 1.2: Die Unsymmetrie $U(\alpha_0)$ für die Achse größter Symmetrie α_0 der Umlaufwinkelverteilung $I(\alpha)$ ist für Protonen des P4-Kanals vom 8. Juni (doy 149) 1980 auf HELIOS 1 im oberen Teil der Abbildung über der Zeit aufgetragen. Im mittleren Teil ist der Differenzwinkel zwischen der auf die Sektorebene projizierten Magnetfeldrichtung ξ und der Achse größter Symmetrie α_0 über der Zeit aufgetragen. Die dazugehörige Verteilung des Differenzwinkels $\xi - \alpha_0$ ist im unteren Teil der Abbildung zu sehen.

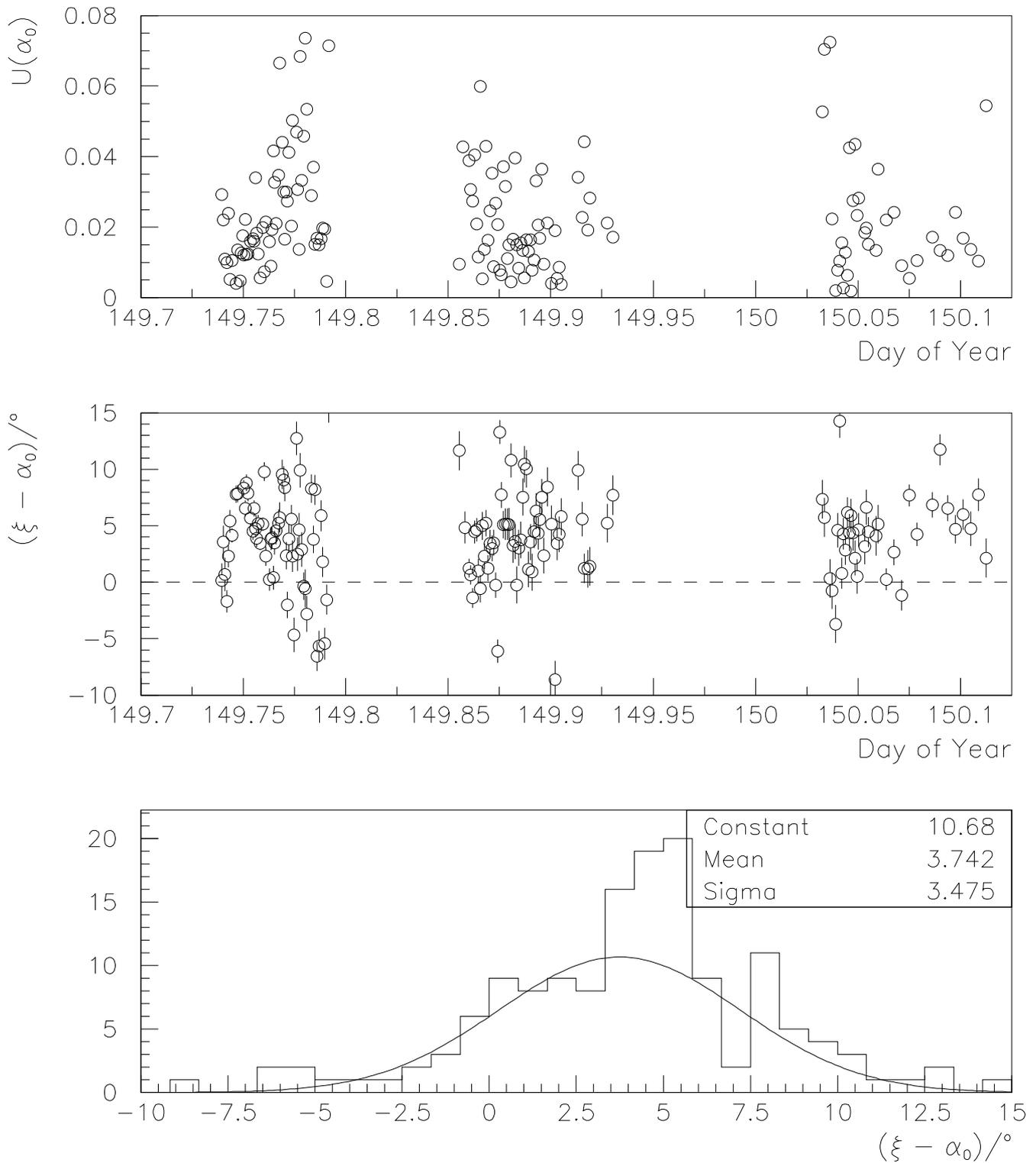


Abbildung 1.3: Die Unsymmetrie $U(\alpha_0)$ für die Achse größter Symmetrie α_0 der Umlaufwinkelverteilung $I(\alpha)$ ist für α -Teilchen des A2-Kanals vom 8. Juni (doy 149) 1980 auf HELIOS 1 im oberen Teil der Abbildung über der Zeit aufgetragen. Im mittleren Teil ist der Differenzwinkel zwischen der auf die Sektorebene projizierten Magnetfeldrichtung ξ und der Achse größter Symmetrie α_0 über der Zeit aufgetragen. Die dazugehörige Verteilung des Differenzwinkels $\xi - \alpha_0$ ist im unteren Teil der Abbildung zu sehen.

Abbildungen 1.1– 1.3) erkennt, nicht durch den statistischen Fehler überdeckt werden. Die Anordnung der Datenpunkte in drei Gruppen folgt aus der Anforderung an den statistischen Fehler der Achse größter Symmetrie, die nur in der Anfangsphase nach der Injektion, wenn die PWVs gebündelt sind und hinreichend viele Teilchen beim Beobachter eintreffen, erfüllt ist.

Vergleicht man nun zunächst die Unsymmetrien (ohne Fehlerbalken gezeichnet) der Elektronen, Protonen und α -Teilchen miteinander, so ist deutlich zu erkennen, daß die Unsymmetrie der Elektronen vom Betrag her geringer ist als die der Protonen und der α -Teilchen, und daß sie im zeitlichen Verlauf weniger stark streut. Wie bereits in Abschnitt 1.3.1 erwähnt, können der Compton-Getting-Effekt und starke räumliche Gradienten sowohl der Teilchendichte als auch des Magnetfeldes zu unsymmetrischen PWVs führen. Die hier zu beobachtenden zeitlichen Schwankungen der Unsymmetrie haben jedoch eine andere Ursache. Vergleicht man die Gyrationenradien der Elektronen, Protonen und α -Teilchen miteinander, so zeigt sich wegen der unterschiedlichen Steifigkeit der Teilchen, daß die Protonen des P4-Kanals etwa den gleichen Gyrationenradius haben wie die α -Teilchen des A2-Kanals. Der Gyrationenradius der Elektronen des E03-Kanals, der ≈ 100 km beträgt, ist um zwei Größenordnungen kleiner als die Gyrationenradien der Protonen und α -Teilchen. Die Gyrationenperiode T_{Gyr} der Elektronen mit $2 \cdot 10^{-3}$ s ist sogar um drei Größenordnungen kleiner als die der Protonen bzw. der α -Teilchen.

Je nachdem, welchen Pitchwinkel ϑ ein Teilchen hat, ist auch sein Gyrationenradius r_{Gyr} verschieden, da nach Gleichung (1.4) nur die Projektion des Impulses senkrecht zum Magnetfeld von Bedeutung ist. Die annähernd schraubenförmige Bahn, die ein Teilchen während einer Gyrationenperiode durchfliegt, ist ein Resultat der Lorentz-Kraft, die an jedem Punkt der Bahn auf das Teilchen wirkt.

Die Umlaufwinkelverteilung in der Sektorebene hat nun die Eigenschaft, daß jeder Pitchwinkel zweimal gemessen wird (siehe HATZKY [1993], S. 22). Was dies bedeutet, wird im folgenden erläutert: Stellt man sich ein Detektorteleskop mit einem infinitesimalen Öffnungswinkel vor, so können die Teilchen nur dann in das Detektorteleskop gelangen, wenn die Sektorebene, in der das Detektorteleskop um die Spin-Achse des Raumfahrzeugs rotiert, tangential zum Mantel der schraubenförmigen Teilchenbahn⁷ orientiert ist. Ansonsten würden die Teilchen den infinitesimalen Öffnungskegel verfehlen und nicht ins Detektorteleskop gelangen.

Nimmt man den einfachen Fall an, daß die Magnetfeldrichtung \hat{e}_B in der Sektorebene liegt und der Beobachter auf die Kante der infinitesimal dünnen Sektorebene blickt, so daß die Magnetfeldrichtung genau entlang der Blickrichtung des Beobachters orientiert ist, so erkennt man anhand der Abbildung 1.4, daß das Teilchenteleskop während seines Umlaufs in der Sektorebene die Pitchwinkel mißt, welche jeweils zu PWVs gehören, die aus Teilchen bestehen, deren Bahnen ober- und unterhalb der Sektorebene verlaufen. Es ist nämlich nicht ausreichend, daß die Teilchenbahn beim Eintritt in das Detektorteleskop genau entlang der Symmetrieachse orientiert ist, sondern die Teilchen müssen auch aus der Blickrichtung des Detektorteleskops einfallen. Für die während eines vollen Umlaufs des Detektorteleskops in der Sektorebene um 180° versetzten Blickrichtungen bedeutet dies, daß je nach Blickrichtung des Detektorteleskops entweder nur die Teilchen, die oberhalb oder diejenigen, die unterhalb der Sektorebene gyrieren, den richtigen Richtungssinn haben, um in das Detektorteleskop zu

⁷Man stelle sich dabei am besten eine Fläche im dreidimensionalen Raum vor, die wie eine Röhre geformt ist.

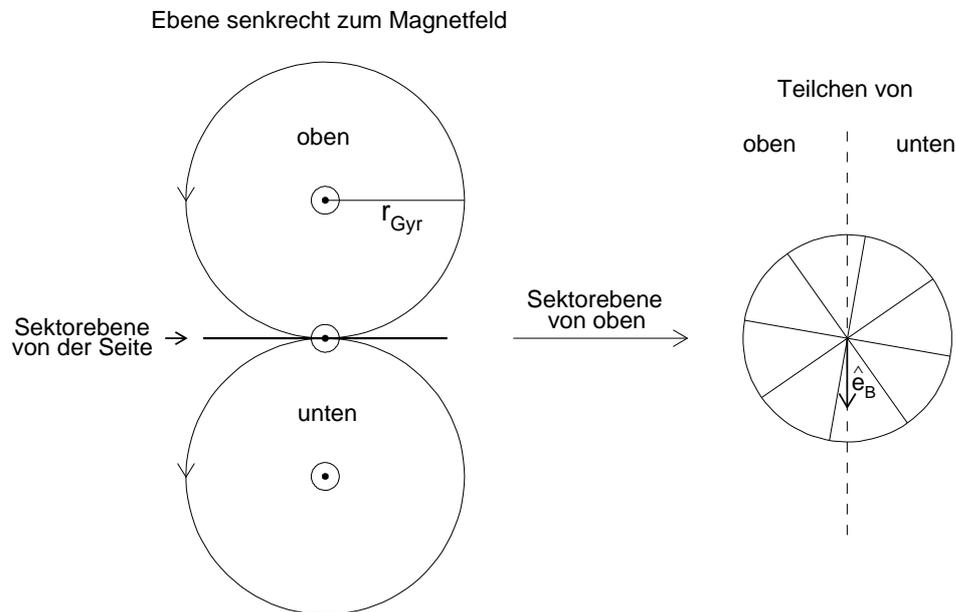


Abbildung 1.4: Im linken Teil der Abbildung sind die Teilchenbahnen und die Sektorebene in der Projektion auf die Ebene senkrecht zum Magnetfeld dargestellt. Die Teilchenbahnen sind so gewählt, daß die Teilchen in das mit einem infinitesimal dünnen Öffnungswinkel versehenen Detektorteleskop einfallen. In welche Hälfte der durch die Magnetfeldrichtung \hat{e}_B geteilten Sektorebene die Teilchen aufgrund ihrer räumlichen Orientierung zur Sektorebene einfallen, ist im rechten Teil der Abbildung zu erkennen.

gelangen. Die PWVs werden dabei bei Azimutwinkeln φ abgetastet, die um 180° verschoben sind.

Bei der aus der Umlaufwinkelverteilung ermittelten Achse größter Symmetrie handelt es sich also genaugenommen nicht um die Achse größter Symmetrie einer einzigen PWV, in dessen Zentrum sich das Detektorteleskop befindet, sondern um Teilchen, die je nach ihrem Gyrationradius um ein Zentrum gyrieren, das unterschiedlich weit von der Sektorebene entfernt ist. Ist nun das Magnetfeld \mathbf{B} in dem räumlichen Bereich, in dem sich die schraubenförmigen Bahnen sowohl ober- als auch unterhalb der Sektorebene befinden, nicht homogen, so ist eine perfekte Symmetrieachse der Umlaufwinkelverteilung nicht zu erwarten.

Die geringe Unsymmetrie der PWVs der Elektronen kann nun so interpretiert werden, daß in dem räumlichen Bereich, in dem die Elektronen sich kurz vor ihrem Nachweis im Detektorteleskop aufgehalten haben, in sehr guter Näherung ein homogenes Magnetfeld vorherrscht. Die der Protonen und α -Teilchen bewegen sich hingegen auf räumlichen Skalen, auf denen das Magnetfeld bereits nicht mehr diese Homogenität aufweist. Dies hat natürlich auch Auswirkungen auf den Differenzwinkel zwischen der aus der Umlaufwinkelverteilung abgeleiteten Achse größter Symmetrie α_0 und der auf die Sektorebene projizierten Magnetfeldrichtung ξ . So ist deutlich zu erkennen, daß die PWVs der Elektronen der Magnetfeldrichtung besser folgen als die Protonen und α -Teilchen, wenn man sich zweier technischer Details bewußt ist:

1. Die Achse größter Symmetrie ist gegenüber der Magnetfeldrichtung ξ um $\approx 3.5^\circ$ verschoben, wie man deutlich bei den im unteren Teil der Abbildungen 1.1–1.3 aufgetragenen Verteilungen des Differenzwinkels $\xi - \alpha_0$ erkennen kann. Eine physikalische Ursache für diesen systematischen Versatz ist sehr unwahrscheinlich. Es kann jedoch aus technischen Gründen zu diesem Versatz kommen, da das E6-Experiment nur bis auf $\pm 2^\circ$ genau eingebaut werden mußte (private Mitteilung KUNOW) und der Sonnendetektor, der für die Einteilung der Sektoren verantwortlich ist, einen Randeffekt aufweist, der in der Größenordnung des scheinbaren Winkeldurchmessers der Sonne ($\approx 3 \cdot 0.5^\circ$ bei $r = 0.3$ AU) liegen kann.
2. Die Achsen größter Symmetrie der Protonen verhalten sich zu Beginn der drei Gruppen von Daten sehr ähnlich wie die der Elektronen. Der Grund hierfür liegt im Übersprechen der Elektronen in die Protonenkanäle, das sich besonders zum Maximum der Zählraten der Elektronen bemerkbar macht, welches wiederum in die Anfangsphase der Protonen fällt.

Man kann sogar sagen, daß die Elektronen exakt der Magnetfeldrichtung folgen, da die Verteilung des Differenzwinkels $\xi - \alpha_0$ eine Breite aufweist, die mit dem statistischen Fehler der Achsen größter Symmetrie zu erklären ist. Die beiden Datenpunkte, die deutlich von der Verteilung abweichen, sind hingegen mit sehr kurzfristigen Änderungen der Magnetfeldrichtung korreliert und können somit erklärt werden. Die Achse größter Symmetrie der Protonen und α -Teilchen hat eine Breite von $\sigma \approx 3.5^\circ$ und liegt damit deutlich über dem aus dem statistischen Fehler zu erwartenden Wert.

Neben dem räumlich größeren Gyrationradius der Protonen und α -Teilchen erschwert es auch die um drei Größenordnungen größere Gyrationperiode dieser Teilchen im Vergleich zu der Gyrationperiode der Elektronen, den Richtungsänderungen des Magnetfeldes auf Sekundenskalen zu folgen. Die Teilchen mitteln vielmehr über diese kurzfristigen Schwankungen der Magnetfeldrichtung hinweg, so daß sich nicht unbedingt dieselbe zeitliche Mittelung der Magnetfeldrichtung des lokal auf der Raumsonde gemessenen Magnetfeldes ergibt.

Insgesamt ist aber auch bei den Protonen und α -Teilchen der Differenzwinkel $\xi - \alpha_0$ hinreichend klein, um bei lückenhaften oder mit schlechten zeitlichen Auflösungen übertragenen Magnetfelddaten zuverlässige PWVs allein aus den Achsen größter Symmetrie ermitteln zu können.

1.4 Der Meßprozeß

Im vorhergehenden Abschnitt wurde bereits auf die Bedeutung der Umlaufwinkelverteilung und ihrer Achse größter Symmetrie eingegangen. Der Schwerpunkt der Betrachtung lag dabei auf dem räumlichen Bereich, den die gyrierenden Teilchen in der letzten Gyrationperiode vor ihrem Nachweis im Detektorteleskop durchfliegen haben. In diesem Abschnitt geht es nun um die Rekonstruktion der PWVs aus den acht Sektormittelwerten. Verschiedene Autoren [ZWICKEL AND WEBBER, 1977; GREEN, 1992; BIEBER, EVENSON, AND POMERANTZ, 1986; HATZKY, 1993] weisen in diesem Zusammenhang darauf hin, daß die Auswirkungen des Meßprozesses im Detail berücksichtigt werden müssen, damit man verlässliche PWVs rekonstruieren kann. Während die meisten Rekonstruktionsverfahren mit numerischen Methoden verbunden sind, gelingt es GREEN [1992], ein Verfahren in Form einer Matrixgleichung zu

formulieren. HATZKY [1993] vereinfacht diese Matrixgleichung, so daß es möglich ist, den einzelnen Auswirkungen des Meßprozesses einfache Matrizen in Diagonalgestalt zuzuordnen. Der Vorteil dieses analytischen Verfahrens gegenüber den numerischen Verfahren ist der ersichtliche Zusammenhang zwischen den Sektormittelwerten, die die Meßwerte darstellen, und den physikalischen Größen, wie z. B. der Anisotropie oder der PWV. Die Durchführung der Fehlerfortpflanzung ist damit ebenfalls auf analytischem Wege möglich.

Unter der Voraussetzung, daß sich die zu messende PWV während des Meßintervalls nur geringfügig verändert hat und die Sektormesswerte über äquidistante Winkelbereiche gemittelt sind, läßt sich eine Umlaufwinkelverteilung $I(\alpha)$ in Form eines trigonometrischen Polynoms rekonstruieren. Der mittlere Effekt der Winkelbereiche der Sektoren während des Meßvorgangs kann dabei rückgängig gemacht werden. Wegen der endlichen Anzahl von Sektoren ist die Winkelauflösung des trigonometrischen Polynoms jedoch begrenzt. Dieses trigonometrische Polynom kann man dazu verwenden, die Achse größter Symmetrie zu bestimmen, wie dies im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde. Liegt (näherungsweise) eine PWV vor, so kann man aus der eindimensionalen Messung in der Sektorebene die zweidimensionale PWV rekonstruieren. Dabei kann berücksichtigt werden, daß sich die Magnetfeldrichtung im allgemeinen nicht in der Sektorebene befindet und das Detektorteleskop einen bestimmten Öffnungswinkel hat. Dieser Öffnungswinkel hat zur Folge, daß sich eine vom Einfallswinkel abhängige Empfindlichkeitsfunktion einstellt, die in Form einer trapezförmigen Empfindlichkeitsfunktion analytisch berücksichtigt werden kann (vgl. Abschnitt 1.2). Schließlich erhält man die PWV zusammen mit den statistischen Fehlern in Form von Legendre-Koeffizienten.

1.5 Die mathematische Beschreibung der PWVs

Die Legendre-Polynome haben den Vorteil, daß sie ein Orthogonalsystem auf dem Definitionsbereich $[-1, 1]$ bilden, so daß es möglich ist, durch Projektion einer stetigen beschränkten Funktion auf die Legendre-Polynome (Basiselemente) die Funktion als Linearkombination der Legendre-Polynome P_n darzustellen (vgl. ABRAMOVITZ AND STEGUN [1972], S. 332ff.; BRONSTEIN ET AL. [1993], S. 344f.). Für die PWVs bedeutet dies, daß die Winkelabhängigkeit vom Pitchwinkel ϑ bzw. Pitchkosinus $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \cos \vartheta$ in einer Reihe von Legendre-Polynomen eindeutig entwickelt werden kann:

$$I(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\mu) \quad \text{mit } \mu \in [-1, 1] \quad (1.18)$$

Die dabei auftretenden Legendre-Koeffizienten g_n lassen sich folgendermaßen berechnen:

$$g_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\mu) P_n(\mu) d\mu \quad (1.19)$$

Ist die Funktion $I(\mu_i)$ nur an den Stützstellen μ_i bekannt, die nicht äquidistant verteilt sein müssen, so können die Legendre-Koeffizienten g_n einzeln durch einen least-square-Fit des entsprechenden Legendre-Polynoms P_n an die Funktion $I(\mu_i)$ bestimmt werden. Hiervon wird in Kapitel 3 Gebrauch gemacht, da die numerischen Lösungen nur an bestimmten Stützstellen bekannt sind.

Der Vorteil der Entwicklung nach Legendre-Koeffizienten besteht in der Möglichkeit, zwei PWVs objektiv miteinander zu vergleichen, indem man ihre Legendre-Koeffizienten miteinander vergleicht. Die Information, die ein Legendre-Koeffizient ausdrückt, ist eindeutig und kann durch keinen anderen Koeffizienten ersetzt werden. Vergleicht man hingegen zwei PWVs, indem man ihre μ -Abhängigkeit mit dem Auge vergleicht, so kann dies zu Fehlinterpretationen führen, wie in Abschnitt 5.3.1 gezeigt wird.

SCHLÜTER [1985], S. 33f. behauptet, daß die nach Gleichung (1.19) berechneten Legendre-Koeffizienten nicht mit den aus der Umlaufwinkelverteilung $I(\alpha)$ in der Sektorebene nach der Methode von GREEN [1991] bestimmten Legendre-Koeffizienten (siehe Abschnitt 1.4) übereinstimmen. Er führt dabei im wesentlichen zwei Argumente an, die im folgenden diskutiert werden:

1. Beim Übergang vom Umlaufwinkel α in der Sektorebene zum Pitchkosinus μ erfolge die Transformation $d\mu = -\sin(\alpha) d\alpha$ in Gleichung (1.19). Dadurch komme es zu einer mit dem Faktor $\sin(\alpha)$ gewichteten Anpassung, die die größeren Winkel überproportional betone.

Dies ist korrekt und sogar absichtlich herbeigeführt. Die Abtastung in der Sektorebene erfolgt mit einer gleichförmigen Wichtung jedes Umlaufwinkels α . Durch die Methode von GREEN [1992] wird die Umlaufwinkelverteilung zunächst in der Basis der $\cos(n\alpha)$ -Funktionen mit $n \in \mathbb{N}_0$ entwickelt, um dann einen Basiswechsel auf die Legendre-Polynome P_n vorzunehmen. Dabei zeigt sich, daß die $\cos(n\alpha)$ -Funktionen im Intervall $\alpha \in [0, \pi]$ eindeutig durch die Basis der Legendre-Polynome P_n dargestellt werden können. Es handelt sich hierbei nicht um eine Näherung, sondern um einen analytischen Zusammenhang, der in Form einer Matrixengleichung formuliert werden kann (siehe HATZKY [1993], S. 58ff.). Die in der Basis der Legendre-Polynome auftretende Wichtung des Umlaufwinkels mit dem Faktor $\sin(\alpha)$ ist dadurch bedingt, daß ein Übergang von der eindimensionalen Umlaufwinkelverteilung auf die zweidimensionale PWV erfolgt, bei der das infinitesimale Raumwinkelement $d\Omega = \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$ zu berücksichtigen ist.

Die PWV läßt sich zwar alleine durch den Pitchwinkel (Höhenwinkel) ϑ beschreiben, da sie rotationssymmetrisch und damit nicht vom Azimutwinkel φ abhängig ist; dennoch handelt es sich um eine zweidimensionale Winkelverteilung. Deutlich wird dies auch, wenn man die folgenden Zusammenhänge verinnerlicht (siehe GREEN [1992], S. 54; HATZKY [1993], S. 16f.):

Der isotrope Anteil \bar{I} der PWV wird durch den g_0 -Koeffizienten des nullten Legendre-Polynoms repräsentiert:

$$\bar{I} = g_0 \quad (1.20)$$

Die Anisotropie $|\mathbf{A}|$ der PWV ist identisch mit dem Quotienten aus den Koeffizienten des ersten und nullten Legendre-Polynoms. Der Quotient ist als eine Normierung der Teilchenstromdichte auf den isotropen Anteil aufzufassen:

$$|\mathbf{A}| = \frac{g_1}{g_0} \quad (1.21)$$

Allgemein werden daher die *Anisotropien n-ter Ordnung* folgendermaßen definiert:

$$\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g_n}{g_0} \quad \text{mit} \quad \xi_1 = |\mathbf{A}| \quad (1.22)$$

2. Andererseits muß man jedoch darauf hinweisen — in diesem Punkt hat SCHLÜTER [1985] recht —, daß die Legendre-Koeffizienten nach Gleichung (1.19) und nach dem Verfahren von GREEN [1992] dann nicht identisch sind, wenn sich die PWVs nicht durch die Legendre-Polynome bis zur vierten Ordnung beschreiben lassen:

$$I(\mu) = \sum_{n=0}^4 g_n P_n(\mu) \quad (1.23)$$

Es ist nämlich prinzipiell nicht möglich, mit acht Sektormeißwerten mehr Richtungsinformation zu gewinnen. Selbst der g_4 -Koeffizient ist schon unter Annahme von Symmetrieeigenschaften der PWV gewonnen worden. Dieses Problem tritt speziell in der Anfangsphase von solaren Ereignissen auf, wenn die PWVs sehr gebündelt sind. Dennoch weichen selbst dann die Legendre-Koeffizienten nur mäßig voneinander ab, da die Mittelung über die Winkelbereiche der Sektoren wie ein Tiefpaßfilter wirkt und besonders die stark richtungsabhängigen Anteile dämpft.

In dieser Arbeit werden, im Gegensatz zu SCHLÜTER [1985], die mit dem zunächst von GREEN [1992] entwickelten und dann von HATZKY [1993] weiterentwickelten Verfahren rekonstruierten Legendre-Koeffizienten direkt mit den Legendre-Koeffizienten aus Gleichung (1.19) verglichen. Dies ist durchaus zu rechtfertigen, da die Legendre-Koeffizienten in der Anfangsphase des Ereignisses wegen ihres geringen Beitrags zum zeitlichen Integral nur einen sehr geringen Einfluß auf das in Abschnitt 6.1 vorgestellte Auswertungsverfahren haben.

Kapitel 2

Die Transportgleichung

2.1 Die physikalische Bedeutung der Transportgleichung

Der Transport energiereicher geladener Teilchen in der inneren Heliosphäre wird üblicherweise durch folgende Fokker-Planck-Gleichung beschrieben, in der die Effekte der Fokussierung und der Pitchwinkelstreuung berücksichtigt sind [ROELOF, 1969]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{v(1-\mu^2)}{2L(s)} \frac{\partial f}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\kappa(s, \mu) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Dabei ist $f(t, s, \mu)$ die über die Gyration gemittelte Phasenraumdichte in Abhängigkeit von der Zeit t , dem Ort s entlang der Magnetfeldlinie und dem Kosinus des Pitchwinkels $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\vartheta)$, Pitchkosinus genannt (siehe Abschnitt 1.1.1). Die Phasenraumdichte ist über folgende Gleichung (siehe ROSSI AND OLBERT [1970], S. 5)

$$I(x, E, \mu, t) = p^2 f(x, p, \mu, t) \quad \text{mit } p = \text{Impulsbetrag} \quad (2.2)$$

mit der eigentlichen Meßgröße, der differentiellen Intensität I (siehe Abschnitt 1.1.2), verknüpft. Zudem besitzt die Phasenraumdichte die Eigenschaft, daß sie unter einer Lorentz-Transformation invariant ist (siehe LANDAU UND LIFSCHITZ [1989], S. 35ff).

Bei der Herleitung der Transportgleichung in der Form von Gleichung (2.1) sind Prozesse, die zu einer Änderung des Impulses p und der damit verbundenen Geschwindigkeit v beitragen, vernachlässigt worden. Dies sind einerseits Beschleunigungsprozesse, die durch elektrische Felder und zeitlich veränderliche Magnetfelder bedingt sind, wie sie z. B. in interplanetaren Stoßwellen (stoßfreien Schockwellen) auftreten, andererseits Prozesse, die an die von null verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeit des Sonnenwindes gekoppelt sind, wie die adiabatische Dezeleration. In Kapitel 4 wird speziell auf die durch den Sonnenwind bedingten zusätzlichen Terme in der Transportgleichung eingegangen, die bei niedrigen Teilchenenergien, d. h. bei Protonen mit Energien im keV-Bereich, einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag liefern. Desweiteren sind Driftprozesse wie z. B. die Krümmungsdrift und Gradienten senkrecht zum mittleren Magnetfeld \mathbf{B} als Effekte höherer Ordnung vernachlässigt worden.

2.1.1 Die systematischen Kräfte

Um einen einfachen Zugang zu der Transportgleichung zu gewinnen, ist es angebracht, die ersten drei Terme auf der linken Seite zunächst separat zu betrachten. Diese Terme gehorchen

der Liouvillegleichung für ein geladenes Teilchen in einem zeitlich konstanten inhomogenen Magnetfeld $B(s)$ und sind Ausdruck der Tatsache, daß die Phasenraumdichte entlang der Teilchenbahn im Phasenraum konstant ist:

$$\frac{df}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{d(mv\mu)}{dt} \frac{\partial f}{\partial(mv\mu)} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{mit } \frac{ds}{dt} = v\mu \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{v(1-\mu^2)}{2L(s)} \quad \text{und} \quad L(s) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{B}{\partial B/\partial s} = \frac{1}{\nabla \cdot \hat{e}_B} \quad (2.4)$$

Dabei ist ds/dt die Geschwindigkeitskomponente $v_{||}$ entlang der Magnetfeldlinie. Die zeitliche Änderung des Pitchkosinus $d\mu/dt$ ist durch die systematische Kraft gegeben, die auf einen magnetischen Dipol in einem inhomogenen Magnetfeld wirkt. Der Term wird von ROELOFF [1969] unter der Annahme der Erhaltung des Betrags des *magnetischen Moments* M eines gyrierenden Teilchens (siehe HÜBNER [1982], S. 19)

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_{\text{Gyr}}^2}{2mB} = \text{const} \quad (2.5)$$

im Sinne der adiabatischen Invarianz (*erste adiabatische Invariante*) hergeleitet. Gleichbedeutend ist dies mit der Reflexionsbedingung¹ (siehe HÜBNER [1982], S. 33)

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{B}{B_S}} \quad \text{mit } B_S = \text{magnetische Flußdichte am Spiegelunkt} \quad (2.6)$$

für ein geladenes Teilchen in einem inhomogenen Magnetfeld. Es folgt somit

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu}{dB} \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2\mu} \frac{1-\mu^2}{B} \frac{\partial B}{\partial s} v\mu = \frac{v}{2L(s)} (1-\mu^2) \quad (2.7)$$

Der Fokussierungslänge $L(s)$ kommt dabei die Bedeutung einer Skalenlänge des inhomogenen Magnetfeldes zu. Für den einfachen Fall eines homogenen Magnetfeldes $\partial B/\partial s = 0$ ergibt sich eine unendlich große Fokussierungslänge, so daß der dritte Term in der Gleichung (2.1) bzw. (2.3) identisch verschwindet. Dies stimmt mit der Tatsache überein, daß auf einen magnetischen Dipol in einem homogenen Magnetfeld keine Kraft ausgeübt wird.

Ein realistischer Verlauf des interplanetaren Magnetfeldes wird durch eine (mit der Sonne) *korotierende Archimedische Spirale* wiedergegeben (siehe PARKER [1958]; BIEBER, EVENSON, AND MATTHAEUS [1987A]), woraus für den Betrag des Magnetfeldes folgt:

$$B = \frac{B(r_0)}{r^2} \sqrt{1 + (\beta r)^2} \quad \text{mit } \beta \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\omega_s}{v_{\text{sw}}} \sin(\theta) \quad (2.8)$$

mit r = radialer Abstand
 ω_s = mittlere siderische Winkelgeschwindigkeit der Sonne
 v_{sw} = Geschwindigkeit des Sonnenwindes
 θ = heliographische Breite mit $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird, wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, davon ausgegangen, daß der Beobachter sich in der Ebene des Sonnenäquators ($\theta = 90^\circ$) befindet.

¹GREEN [1993] zeigt, daß die Reflexionsbedingung für den Fall eines magnetischen Monopolfeldes strenge Gültigkeit besitzt.

Desweiteren wird für die Winkelgeschwindigkeit der Sonne ein Wert von $\omega_s = 0.0103$ rad/h und für die Sonnenwindgeschwindigkeit ein Wert von $v_{sw} = 400$ km/s angenommen, so daß insgesamt folgt: $\beta = -1.073$ AU⁻¹.

Der Betrag des interplanetaren Magnetfeldes nimmt mit zunehmendem radialen Abstand r von der Sonne ab, was zu einem divergierenden Magnetfeld führt. Der Winkel Ψ zwischen der radialen Richtung und der Archimedischen Spirale ergibt sich zu

$$\tan(\Psi) = \frac{v_\varphi}{v_r} = -\frac{\omega_s \sin(\theta) r}{v_{sw}} = \beta r \quad \Rightarrow \quad \cos(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta r)^2}} \quad (2.9)$$

so daß die Fokussierungslänge $L(s)$ für das interplanetare Magnetfeld in Form einer Archimedischen Spirale berechnet werden kann:²

$$\frac{1}{L} = -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{dr}{ds} = \left(-\frac{1}{B}\right) \cdot \left(-B \frac{2 + (\beta r)^2}{r[1 + (\beta r)^2]}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta r)^2}} \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \quad L(r) = \frac{r[1 + (\beta r)^2]^{3/2}}{2 + (\beta r)^2} \quad (2.11)$$

Die funktionale Abhängigkeit der Bogenlänge s vom radialen Abstand r ist:

$$s = \frac{1}{2\beta} \left(\beta r \sqrt{1 + (\beta r)^2} + \operatorname{arsinh}(\beta r) \right) \quad (2.12)$$

Der radiale Abstand kann nicht als Funktion der Bogenlänge angegeben werden, da die Struktur der Gleichung (2.12) ein analytisches Auflösen nach der Variablen r nicht gestattet. Dies kann aber dennoch mit Hilfe von numerischer Nullstellenbestimmung (vgl. PRESS ET AL. [1992], S. 352ff.) geschehen.

Als Ergebnis sind in Abbildung 2.1 die Fokussierungslänge $L(s)$ und der Faktor $1/(2L(s))$ im halblogarithmischen Maßstab dargestellt. Die Fokussierungslänge wächst monoton mit zunehmendem Abstand von der Sonne und variiert dabei in der inneren Heliosphäre über mehrere Größenordnungen. In der Nähe der Sonne verhält sich die Fokussierungslänge wie $L(s) \approx s/2$, woraus $1/(2L(s)) \approx s^{-1}$ folgt. Der Betrag des dritten Terms in der Gleichung (2.1) bzw. (2.3) und damit die Bedeutung der Fokussierung in der Nähe der Sonne nimmt somit sehr stark zu.

Analytische Näherungslösungen der Transportgleichung, die wegen der einfachen mathematischen Handhabung die Fokussierungslänge als konstant annehmen, sind in diesem Bereich nicht anzuwenden. Auch bei den numerischen Lösungsmethoden (siehe Abschnitt 2.4) ist besondere Sorgfalt auf diesen Bereich zu verwenden, da die hier auftretenden großen räumlichen Gradienten und die stark gebündelten Pitchwinkelverteilungen einen sehr hohen Schwierigkeitsgrad darstellen.

2.1.2 Der Diffusionsterm

Der vierte noch verbleibende Term der Gleichung (2.1) repräsentiert die stochastischen Kräfte, die auf ein geladenes Teilchen in einem homogenen Magnetfeld mit überlagerten schwachen

²Die graphische Darstellung des radialen Verlaufs der Fokussierungslänge kann bei SCHLÜTER [1985], S. 67 nachgeschlagen werden.

Magnetfeldfluktuationen wirken. Er wurde sowohl von JOKIPII [1966, 1968] als auch von HASSELMANN AND WIBBERENZ [1968, 1970] im Rahmen der *Quasi-Linearen Theorie* (QLT) hergeleitet. Voraussetzung dabei ist, daß die Fluktuationen schwach sind, so daß man sich im Rahmen einer Störungsrechnung auf die linearen Terme beschränken kann. Dies ist gleichbedeutend mit der Anschauung, daß sich der Pitchwinkel eines Teilchens unter Verletzung der ersten adiabatischen Invarianten während einer Gyrationperiode nur wenig ändern darf. Erst die Summation über viele solche Änderungen führt zu einem merklichen Effekt. Aus diesem Grund sind die Fluktuationen, die in Resonanz zur Gyrationperiode liegen, d. h.

$$v_{\parallel} T_{\text{Gyr}} = \frac{2\pi}{k_{\parallel}} \quad \Rightarrow \quad k_{\parallel} = \frac{\omega_{\text{Gyr}}}{v_{\parallel}} = \frac{\omega_{\text{Gyr}}}{v\mu} \quad (2.13)$$

mit v_{\parallel} = Geschwindigkeitskomponente entlang der Magnetfeldlinie
 T_{Gyr} = Gyrationperiode
 k_{\parallel} = Wellenzahl parallel zum mittleren Magnetfeld
 ω_{Gyr} = Gyrationfrequenz (siehe Gleichung (1.5))

von besonderer Bedeutung (*Resonanzwechselwirkung*). Die Summe der Pitchwinkeländerungen kann schließlich zu einer Umkehr der Ausbreitungsrichtung führen, so daß der Begriff der räumlichen Diffusion angemessen erscheint. In diesem Zusammenhang kann eine *mittlere freie Weglänge* λ_{\parallel} entlang der Magnetfeldlinie definiert werden:³

$$\lambda_{\parallel}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3v}{8} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\mu^2)^2}{\kappa(s,\mu)} d\mu \quad (2.15)$$

Diese Gleichung verknüpft den *Pitchwinkelstreuoeffizienten* $\kappa(s,\mu)$ und die mittlere freie Weglänge $\lambda_{\parallel}(s)$ miteinander.

Wegen des Auftretens von $\kappa(s,\mu)$ im Nenner der Definition von λ_{\parallel} haben die Eigenschaften des Pitchwinkelstreuoeffizienten (PWSK) bei den Werten von μ , für die der PWSK kleine Werte annimmt, einen besonders großen Einfluß auf die resultierende mittlere freie Weglänge.

Die Beziehung zwischen den Magnetfeldfluktuationen, ausgedrückt durch gemischte Spektralfunktionen, und dem Pitchwinkelstreuoeffizienten ist im allgemeinen recht kompliziert. Daher wurden in den Arbeiten von JOKIPII [1966] und HASSELMANN AND WIBBERENZ [1968] die beobachteten Magnetfeldfluktuationen als statische, in das interplanetare Plasma eingefrorene Irregularitäten betrachtet, die von dem Sonnenwind am Beobachter vorbeigetragen werden. Die im allgemeinen dreidimensionale Struktur der Magnetfeldfluktuationen wird

³Die Definition der mittleren freien Weglänge λ_{\parallel} ist von HASSELMANN AND WIBBERENZ [1968] ursprünglich für ein homogenes Magnetfeld eingeführt worden. In dieser Arbeit wird die Definition auch bei nicht homogenen Magnetfeldern angewendet, um ein Maß für die Pitchwinkelstreuung zu erhalten. Die Anschauung einer mittleren freien Weglänge im Sinne der kinetischen Gastheorie (vgl. GERTHSEN UND VOGEL [1995], S. 222) ist dann jedoch nicht mehr angebracht. KUNSTMANN [1979] und GREEN [1992], S. 84 geben als eine Verallgemeinerung für schwach inhomogene Magnetfelder die folgende Definition der mittleren freien Weglänge an:

$$\lambda'_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} 3L \frac{\int_{-1}^{+1} \mu \exp(G(\mu)) d\mu}{\int_{-1}^{+1} \exp(G(\mu)) d\mu} \quad (2.14)$$

wobei die Funktion $G(\mu)$ in der Gleichung (2.41) definiert wird.

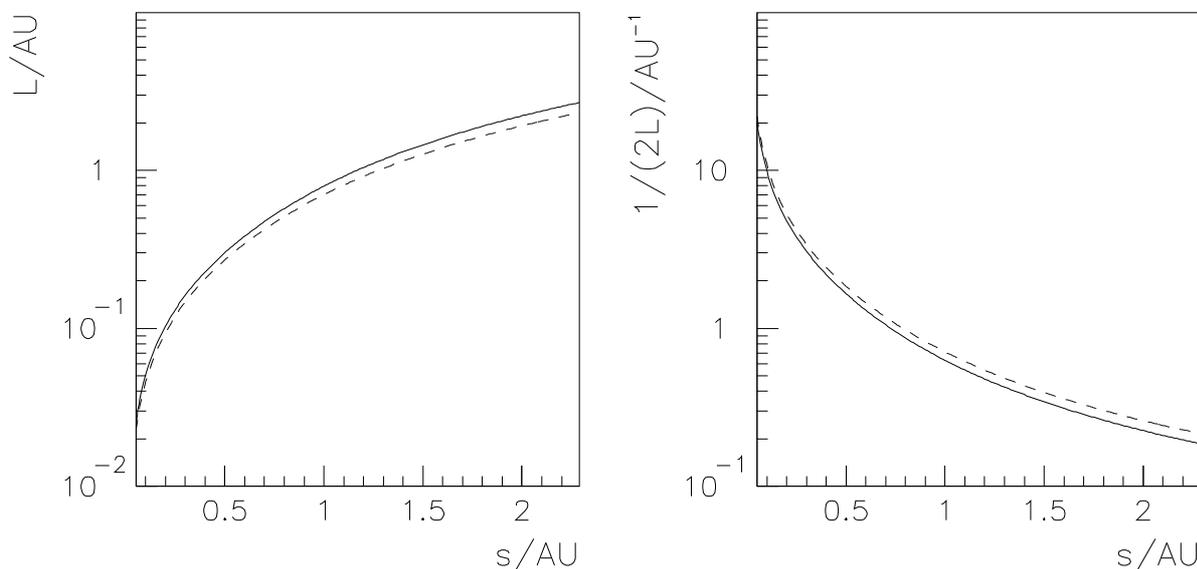


Abbildung 2.1: Die Fokussierungslänge $L(s)$ (links) und der Faktor $1/(2L(s))$ sind in Abhängigkeit von der Bogenlänge s der Magnetfeldlinie in der inneren Heliosphäre für eine Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 400$ km/s dargestellt.

dabei zusätzlich auf den vereinfachten Fall von axialsymmetrischen transversalen Komponenten mit Wellenvektoren, die ausschließlich parallel und antiparallel zum mittleren Magnetfeld liegen, eingeschränkt. Diese Geometrie wird als Slab-Geometrie bezeichnet. In Verbindung mit der QLT wird im allgemeinen von dem *Standardmodell* oder *Standard-QLT* gesprochen.

Angenommen, die Spektraldichte der Magnetfeldfluktuationen kann durch ein Potenzgesetz

$$f(k_{\parallel}) \propto k_{\parallel}^{-q} \quad (2.16)$$

beschrieben werden, so ergibt sich aus dem Standardmodell folgender PWSK:

$$\tilde{\kappa}(\mu) = A(1 - \text{sign}(\mu)\sigma)|\mu|^{q-1}(1 - \mu^2) \quad (2.17)$$

Die Konstante A dient dazu, die Stärke der Pitchwinkelstreuung festzulegen und steht in direktem Zusammenhang mit der mittleren freien Weglänge, wie man durch Einsetzen der Gleichung (2.17) in die Definition der mittleren freien Weglänge (2.15) erkennt. Für $q < 2$ ergibt sich:

$$A = \frac{3}{2} \frac{v}{\lambda_{\parallel}} \frac{1}{(1 - \sigma^2)(q - 2)(q - 4)} \quad (2.18)$$

Der zusätzlich auftretende Parameter σ wird im magnetostatischen Fall des Standardmodells mit der *magnetischen Polarisation* der in das Plasma eingefrorenen Magnetfeldfluktuationen in Verbindung gebracht (siehe HASSELMANN AND WIBBERENZ [1968]) und als unabhängig von der Wellenzahl k_{\parallel} angenommen. Teilt man die Magnetfeldfluktuationen in zwei zirkular polarisierte Wellenmoden auf, von der die eine bei Blickrichtung entlang des

Magnetfeldes einen linksläufigen Drehsinn (L) und die andere einen rechtläufigen Drehsinn (R) hat, so kann die effektive magnetische Polarisation folgendermaßen definiert werden:

$$\sigma(k_{\parallel}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_L(k_{\parallel}) - I_R(k_{\parallel})}{I_{\text{tot}}(k_{\parallel})} \quad (2.19)$$

Dabei sind $I_L(k_{\parallel})$ und $I_R(k_{\parallel})$ die wellenzahlabhängigen Intensitäten der links- und rechtspolarisierten Wellenmoden mit der Gesamtintensität $I_{\text{tot}}(k_{\parallel})$.

Der Polarisationsparameter σ ist proportional zu der abstrakter definierten *magnetischen Helizität* bei MATTHAEUS AND GOLDSTEIN [1982]:

$$H_m \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (2.20)$$

\mathbf{A} ist das magnetische Vektorpotential, welches \mathbf{B} durch die Relation $\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{A}$ definiert. Aus dieser Definition ergibt sich die wichtige Eigenschaft, daß die magnetische Helizität ein Pseudoskalar ist und das Vorzeichen unter Koordinateninversionen $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ wechselt. Durch die magnetische Helizität wird somit die Abweichung der Magnetfeldfluktuationen von der Spiegelsymmetrie gemessen.

Ausgehend von der anschaulicheren Definition (2.19) lassen sich in Abhängigkeit vom Verhältnis der beiden Wellenmoden zueinander drei Fälle unterscheiden:

1. Die beiden Wellenmoden sind gleich stark vertreten, woraus eine magnetische Polarisation von $\sigma = 0$ folgt. Dies ist gleichbedeutend mit der Anschauung von linear polarisierten Magnetfeldfluktuationen.
2. Die beiden Wellenmoden stehen in einem bestimmten Verhältnis zueinander, ohne daß eine der beiden Wellenmoden identisch verschwindet. Die Magnetfeldfluktuationen sind somit elliptisch polarisiert, und die magnetische Polarisation überdeckt den Wertebereich: $-1 < \sigma < 1$.
3. Eine der beiden Wellenmoden verschwindet identisch, so daß die Magnetfeldfluktuationen zirkular polarisiert sind. Je nachdem welche Wellenmode nicht auftritt, sind die Magnetfeldfluktuationen links bzw. rechts zirkular polarisiert, und die magnetische Polarisation nimmt die Werte $\sigma = 1$ bzw. $\sigma = -1$ an.

Da der Drehsinn des gyrierenden Teilchens und damit auch die Resonanzwechselwirkung mit den zirkular polarisierten Wellenmoden vom Vorzeichen der Ladung abhängig sind, ist die durch die magnetische Polarisation modifizierte Pitchwinkelstreuung ladungsvorzeichenabhängig. Durch den Fokussierungsterm in der Transportgleichung ist eine Vorzugsrichtung gekennzeichnet, so daß sich für Teilchen mit $\mu > 0$ eine von der Sonne weggerichtete Ausbreitungsrichtung ergibt. Der Pitchkosinus μ ist somit unabhängig von der Richtung des mittleren Magnetfeldes, das entweder in Richtung zur Sonne oder von der Sonne weg gerichtet sein kann. Da die Bestimmung des Drehsinns der zirkular polarisierten Wellenmoden jedoch in bezug auf die Richtung des mittleren Magnetfeldes erfolgt, ist die durch die Polarisation hervorgerufene Asymmetrie des PWSK zusätzlich von der Richtung des Magnetfeldes abhängig (vgl. BIEBER, EVENSON, AND MATTHAEUS [1987B]).

Der Spezialfall isotroper Pitchwinkelstreuung, d. h. gleicher Streuwahrscheinlichkeit für alle Pitchwinkel, ergibt sich für $q = 1$ und führt zu einem Verlauf des PWSK, der in Abbildung 2.2 a) dargestellt ist. Der dabei noch verbleibende Faktor $(1 - \mu^2)$ hat seinen Ursprung in der speziellen Koordinatenwahl des Pitchkosinus für den Streuterm und erzwingt, daß der PWSK an den Grenzen $\mu = \pm 1$ identisch verschwindet.

Die in dieser Arbeit betrachteten PWSKs $\tilde{\kappa}(\mu)$ werden auf die folgende Form beschränkt⁴ (vgl. BEECK AND WIBBERENZ [1986]):

$$\tilde{\kappa}(\mu) = A \left((1 - \text{sign}(\mu)\hat{\sigma})|\mu|^{\hat{q}-1} + H \right) (1 - \mu^2) \quad (2.21)$$

Durch die Wahl der Parameter \hat{q} , H , und $\hat{\sigma}$ können unterschiedliche Verläufe des PWSK festgelegt werden. Dabei kommt den Parametern folgende Bedeutung zu:

1. Wie man anhand der Gleichungen (2.16) und (2.17) erkennt, steht der Parameter \hat{q} im Standardmodell in einem ursächlichen Zusammenhang mit dem Spektralindex q der Magnetfeldfluktuationen des interplanetaren Magnetfeldes.

Um sich nicht vorschnell auf das Standardmodell festzulegen, wird in dieser Arbeit ein direkter Zusammenhang zwischen \hat{q} und q nicht vorausgesetzt. Der Parameter \hat{q} soll vielmehr die Möglichkeit eröffnen, schwache Streuung in der Umgebung von $\mu = 0$, dem sogenannten “*resonance gap*”, auszudrücken. Wie man anhand der Abbildungen 2.2 b), c) und d) erkennen kann, wird die Breite des “*resonance gap*” durch den Betrag von \hat{q} beeinflusst. Je größer der Betrag von \hat{q} ist, desto breiter ist der Bereich schwacher Streuung um $\mu = 0$.

2. Der Parameter H dient zur “Auffüllung” des “*resonance gap*”, um nichtlineare Korrekturen, Spiegelung durch magnetoakustische Wellen und Modifikationen des Slab-Modells zu berücksichtigen. Ein Überblick über diese Effekte wird sowohl bei KUNOW ET AL. [1991] als auch bei DRÖGE [1994] gegeben.

Eine besondere Bedeutung kommt dem Parameter H für $\hat{q} \geq 2$ zu, da eine Streuung in den Halbraum $\mu \in [-1, 0)$ für diesen Fall nicht möglich ist. Grund hierfür ist die Nullstelle des PWSK für $\mu = 0$ und $\hat{q} > 1$, die bei der Berechnung der mittleren freien Weglänge nach der Definition (2.15) zu einer Polstelle des Integranden führt. Für $\hat{q} < 2$ konvergiert das Integral, jedoch nicht für $\hat{q} \geq 2$. Die mittlere freie Weglänge ist in diesem Fall unendlich, so daß sich der vollständig kohärente Transport ausbildet (vgl. EARL [1974]; KUNSTMANN UND ALPERS [1977]). Setzt man für H einen positiven Wert ein (z. B. $H=0.05$), so läßt sich die Nullstelle für $\mu = 0$ vermeiden, wie man anhand der Abbildungen 2.2 c) und d) erkennen kann. Für die mittleren freien Weglängen ergeben sich damit endliche Werte.

3. Der Parameter $\hat{\sigma}$ ermöglicht schließlich die Darstellung von unsymmetrischen PWSKs, welche unterschiedlich starke Streuung in Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung ausdrücken. So führen z. B. positive $\hat{\sigma}$ -Werte zu einer verstärkten Streuung für Teilchen mit einem Pitchkosinus $\mu < 0$, d. h. einer Flugrichtung zur Sonne. In der Theorie des Standardmodells wird diese Unsymmetrie, wie oben erwähnt, mit der Polarisation bzw. Helizität der Magnetfeldfluktuationen in Verbindung gebracht.

⁴Das in Abschnitt 3.4 vorgestellte Programm GREF unterliegt nicht dieser Beschränkung.

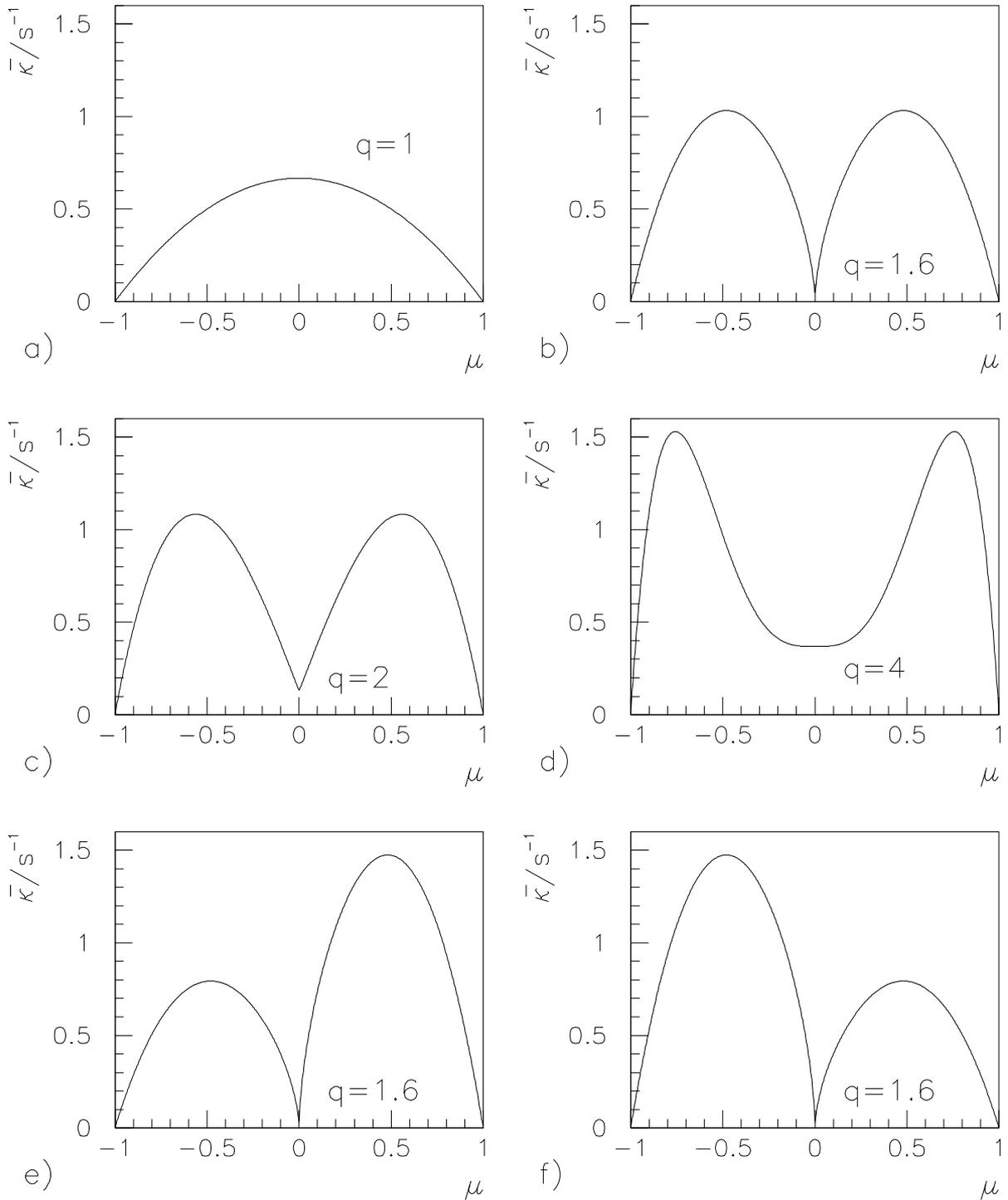


Abbildung 2.2: Der durch die Gleichung (2.21) festgelegte und nach der Gleichung (2.23) normierte Pitchwinkelstreuoeffizient $\bar{\kappa}$ ist für unterschiedliche Parameter dargestellt: a) isotroper PWSK, d. h. $\hat{q} = 1$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$; b) $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$; c) $\hat{q} = 2$, $H = 0.05$ und $\hat{\sigma} = 0$; d) $\hat{q} = 4$, $H = 0.05$ und $\hat{\sigma} = 0$; e) $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = -0.3$; f) $\hat{q} = 1$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0.3$.

Wie schon bei dem Parameter \hat{q} soll eine vorschnelle Festlegung auf das Standardmodell vermieden werden, um für unterschiedliche Interpretationen weiterhin offen zu sein. Beispiele für $\hat{\sigma} \neq 0$ sind in den Abbildungen 2.2 e) ($\hat{\sigma} = -0.3$) und f) ($\hat{\sigma} = 0.3$) dargestellt.

Es soll noch einmal betont werden, daß die Wahl des PWSK in der Form (2.21) eine Einschränkung darstellt, die es aber dennoch ermöglicht, qualitative Aussagen aus der Theorie (QLT) über die Form des PWSK zu berücksichtigen, ohne die Parameter \hat{q} , H und $\hat{\sigma}$ in einen direkten Zusammenhang mit Eigenschaften der Magnetfeldfluktuationen zu bringen. Kompliziertere Formen des PWSK sind durchaus denkbar, haben aber den Nachteil, daß sie aus den hier untersuchten, in ihrer Winkelauflösung eingeschränkten Pitchwinkelverteilungen experimentell nicht überprüfbar sind. In Abschnitt 5.3.3 wird gezeigt, daß verschiedene Parametersätze für $\tilde{\kappa}$ zu Lösungen $f(t, s, \mu)$ führen, die kaum voneinander zu unterscheiden sind.

Schreibt man zusätzlich (vgl. SCHLÜTER [1985], S. 79) den PWSK in Form eines Produktansatzes

$$\kappa(s, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{\parallel}(s) \tilde{\kappa}(\mu) \quad (2.22)$$

so kann durch geeignete Normierung⁵

$$\bar{\kappa}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - \tilde{\mu}^2)^2}{\tilde{\kappa}(\tilde{\mu})} d\tilde{\mu} \cdot \tilde{\kappa}(\mu) \quad (2.23)$$

das Produkt (2.22) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\kappa(s, \mu) = \frac{3v}{4} \frac{1}{\lambda_{\parallel}(s)} \cdot \bar{\kappa}(\mu) \quad (2.24)$$

Der PWSK ist somit in einen die Stärke der Streuung bestimmenden Anteil $1/\lambda_{\parallel}(s)$ und einen die Form der PWSK bestimmenden Anteil $\bar{\kappa}(\mu)$ aufgespalten worden. Der in Gleichung (2.22) gewählte Produktansatz beschränkt natürlich die Vielzahl der möglichen Funktionen für $\kappa(s, \mu)$ deutlich. Es ist daher notwendig, im weiteren Verlauf der Arbeit (siehe Abschnitt 5.2.1) die hier gemachte Annahme eines Produktansatzes zu rechtfertigen.

2.1.3 Bezug zur radialen Diffusion

Die mittlere freie Weglänge λ_{\parallel} entlang der Magnetfeldlinie ist mit der *radialen mittleren freien Weglänge* λ_r durch folgende Beziehung verknüpft (siehe NG AND GLEESON [1971])

$$\lambda_r(r) = \lambda_{\parallel}(r) \cos^2(\Psi) \quad (2.25)$$

wobei Ψ der in Gleichung (2.9) definierte Winkel zwischen radialer Richtung und Archimedischer Spirale ist. Durch die Gleichung (2.25) wird eine Beziehung zwischen dem radialen Diffusionsproblem und der Diffusion entlang der Archimedischen Spirale des interplanetaren Magnetfeldes geschaffen.

⁵Die Normierung ist bis auf den Faktor 1/2 eindeutig. Der Faktor 1/2 wurde in Analogie zu SCHLÜTERS [1985] Definition (3-2) gewählt, kann aber generell beliebig gewählt werden, da die von SCHLÜTER [1985] bevorzugte Mittelung über das Pitchkosinusintervall $[-1, 1]$ nicht zwingend ist.

Die radialen Verläufe von $\lambda_r(r)$ sollen in dieser Arbeit auf Potenzgesetze der Form

$$\lambda_r(r) \propto \left(\frac{r}{r_0}\right)^b \quad (2.26)$$

beschränkt werden (vgl. KALLENRODE [1993]). Dies ist, wie auch schon bei der Festlegung des PWSK keine Beschränkung, die durch das im Kapitel 3 vorgestellte Differenzenverfahren bedingt ist, sondern hat im wesentlichen die folgenden Gründe:

1. Die Meßdaten von einem Raumfahrzeug erlauben keine eindeutige Bestimmung des radialen Verlaufs von λ_r . Je komplizierter der angenommene Verlauf für λ_r ist, desto mehr freie Parameter sind aus den Messungen zu bestimmen. Dies kann aber nur mit unrealistischen Forderungen an die in-situ-Messungen erreicht werden. Die Festlegung auf einen bestimmten radialen Verlauf durch ein Potenzgesetz im Rahmen der Transportgleichung sollte zu keinem Widerspruch mit den Meßdaten führen. Daraus kann aber nicht zwingend abgeleitet werden, daß zum Zeitpunkt der Messung exakt dieser radiale Verlauf vorgelegen hat.
2. Wegen der einfachen Handhabbarkeit sowohl in analytischen Lösungen als auch in der Datenauswertung hat sich in der Literatur der Potenzgesetzverlauf etabliert. Der radiale Verlauf ist mit dem einzigen Parameter b zu beschreiben, was einen Vergleich der Ergebnisse verschiedener Autoren vereinfacht.

In Abbildung 2.3 ist die mittlere freie Weglänge λ_{\parallel} entlang der Magnetfeldlinie für $\lambda_r = 0.1 \cdot (r/r_0)^b$ AU in Abhängigkeit sowohl von dem radialen Abstand r als auch von der Bogenlänge s entlang der Magnetfeldlinie aufgetragen. Für den Parameter b sind drei verschiedene Werte gewählt worden, die zu folgenden Funktionsverläufen führen: Die gestrichelte Kurve steht für $b = -0.5$, die durchgezogene Kurve für $b = 0$ und die gepunktete Kurve für $b = 0.5$. Im weiteren Verlauf der Arbeit (siehe Abschnitt 6.2) wird sich zeigen, daß der einfache Verlauf einer konstanten radialen mittleren freien Weglänge $\lambda_r = \text{const}$, d. h. $b = 0$, von besonderer Bedeutung ist. Wie sich anhand der Abbildung 2.3 erkennen läßt, wächst die mittlere freie Weglänge λ_{\parallel} für $b \geq 0$ mit zunehmendem r bzw. s monoton an. Dies ist gleichbedeutend mit einer schwächer werdenden Pitchwinkelstreuung.

2.2 Mathematische Betrachtung der Transportgleichung

Im vorherigen Abschnitt wurde die allgemeine Transportgleichung für energiereiche geladene Teilchen in der inneren Heliosphäre aufgestellt und die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme erläutert. Notwendige Einschränkungen durch die Form des interplanetaren Magnetfeldes und die zur Verfügung stehende Qualität der Meßdaten wurden vorgenommen. Im folgenden soll der Schwerpunkt auf die mathematische Behandlung der Transportgleichung gelegt werden, da natürlich nicht die Transportgleichung selbst, sondern ihre Lösungen im Mittelpunkt des Interesses stehen.

2.2.1 Die einzelnen Terme der Transportgleichung

Die Transportgleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung (PDGL) zweiter Ordnung in drei Variablen von parabolischem Typ. Leider ist sie damit bereits so komplex, daß

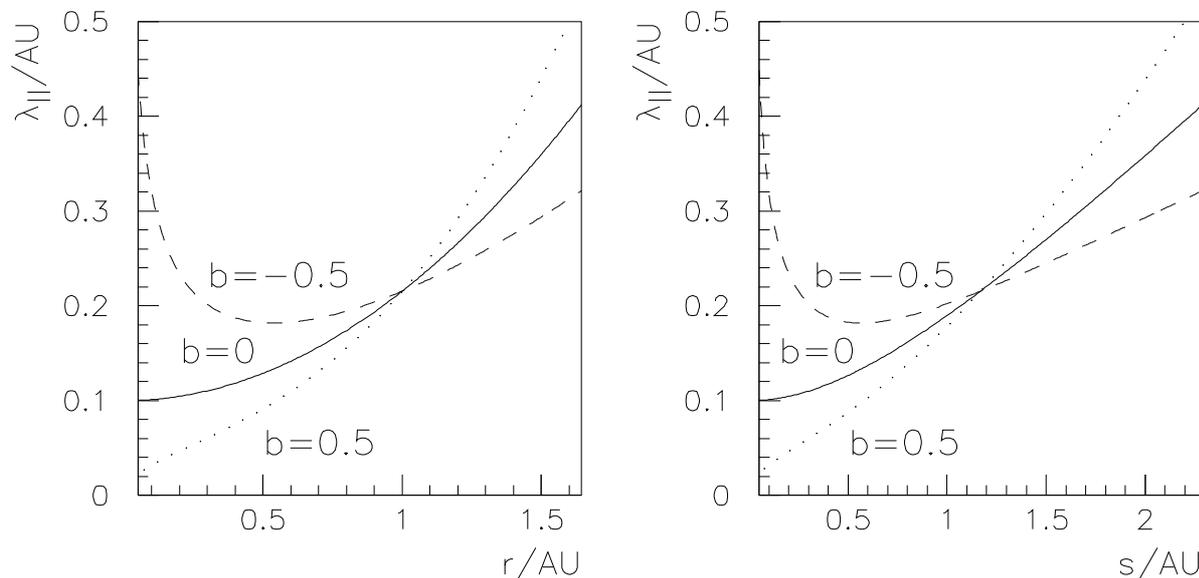


Abbildung 2.3: Die mittlere freie Weglänge $\lambda_{||}$ entlang der Magnetfeldlinie wird für $\lambda_r = 0.1 \cdot (r/r_0)^b$ AU in Abhängigkeit von dem radialen Abstand r (links) und der Bogenlänge s dargestellt. Es wird zwischen folgenden Funktionsverläufen unterschieden: $b = -0.5$ (gestrichelte Kurve), $b = 0$ (durchgezogene Kurve) und $b = 0.5$ (gepunktete Kurve).

eine analytische Lösung für allgemeine Rand- und Anfangsbedingungen nicht bekannt ist. Aus diesem Grund sollen die einzelnen Terme zusammen mit der Zeitableitung zunächst separat betrachtet werden:

Der Advektionsterm⁶ führt zu einer linearen PDGl erster Ordnung von hyperbolischem Typ

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f}{\partial s} = 0 \quad \text{mit} \quad f(0, s) = f_0(s) \quad \text{für} \quad t = 0 \quad (2.27)$$

mit der Lösung

$$f(t, s) = f_0(s - v\mu t) \quad (2.28)$$

Die Anfangsbedingung f_0 breitet sich demgemäß mit der Geschwindigkeit $v\mu$ in positiver Richtung entlang der räumlichen Koordinate aus, so daß die Advektionsgleichung auch als eindimensionale Wellengleichung bezeichnet wird.

Betrachtet man die Kurven in der s - t -Ebene, die sogenannten *Charakteristiken*, auf denen die Eigenschaft f erhalten bleibt, so kann die Advektionsgleichung folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{ds}{dx} \frac{\partial f}{\partial s} = 0 \quad (2.29)$$

⁶Der Term wird auch als **Konvektionsterm** bezeichnet. Da die Konvektion in der Meteorologie mit vertikalen Strömungen der Atmosphäre verbunden wird, soll hier, um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, von dem Advektionsterm gesprochen werden (vgl. ROACH [1982] S. 10).

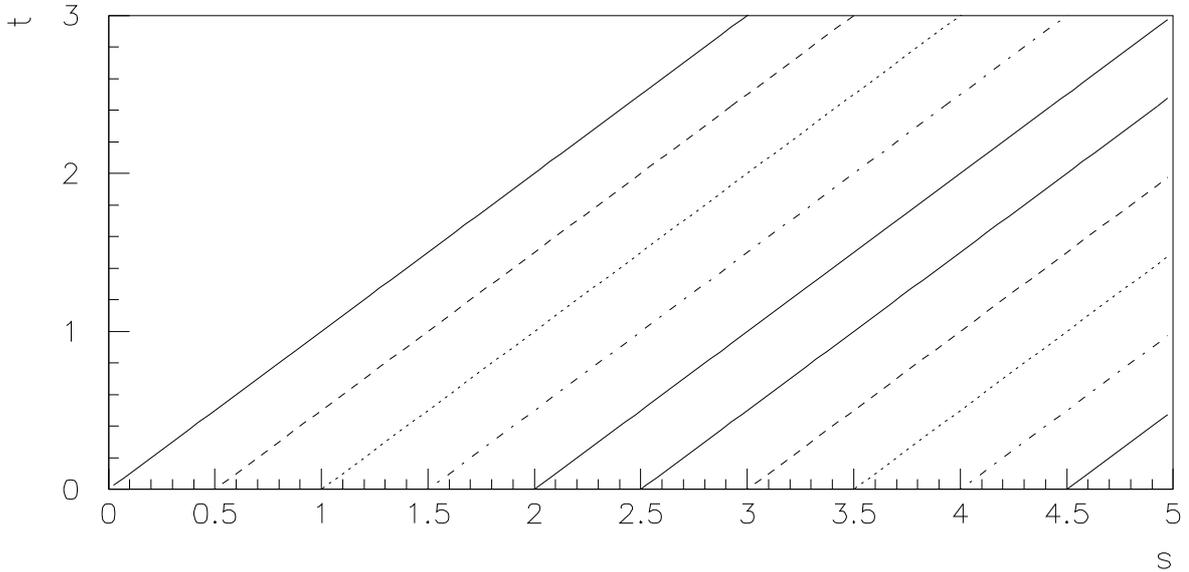


Abbildung 2.4: Die Charakteristiken des Advektionsterms für $v\mu = 1$ in der s - t -Ebene.

$$\text{mit } \frac{dt}{dx} = 1 \quad \frac{ds}{dx} = v\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v\mu} \quad (2.30)$$

Die Charakteristiken sind somit die Kurven (siehe Abbildung 2.4)

$$s - v\mu t = \text{const} \quad (2.31)$$

Die Information (z. B. Phasenraumdichte) breitet sich entlang der Charakteristiken aus. Betrachtet man ein endliches Gebiet, so strömt die Information festgelegt durch die Randbedingung an der unteren Intervallgrenze in das Gebiet und verläßt es schließlich an der oberen Intervallgrenze. Der Advektionsterm ist somit physikalisch gesehen mit dem räumlichen Transport der Teilchen mit der Geschwindigkeit $v\mu$ entlang der Bogenlänge s der Magnetfeldlinie gleichzusetzen.

Der Fokussierungsterm führt ebenfalls zu einer linearen PDGI erster Ordnung von hyperbolischem Typ⁷

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \quad \text{mit } f(0, \mu) = f_0(\mu) \quad \text{für } t = 0 \quad (2.32)$$

mit der Lösung

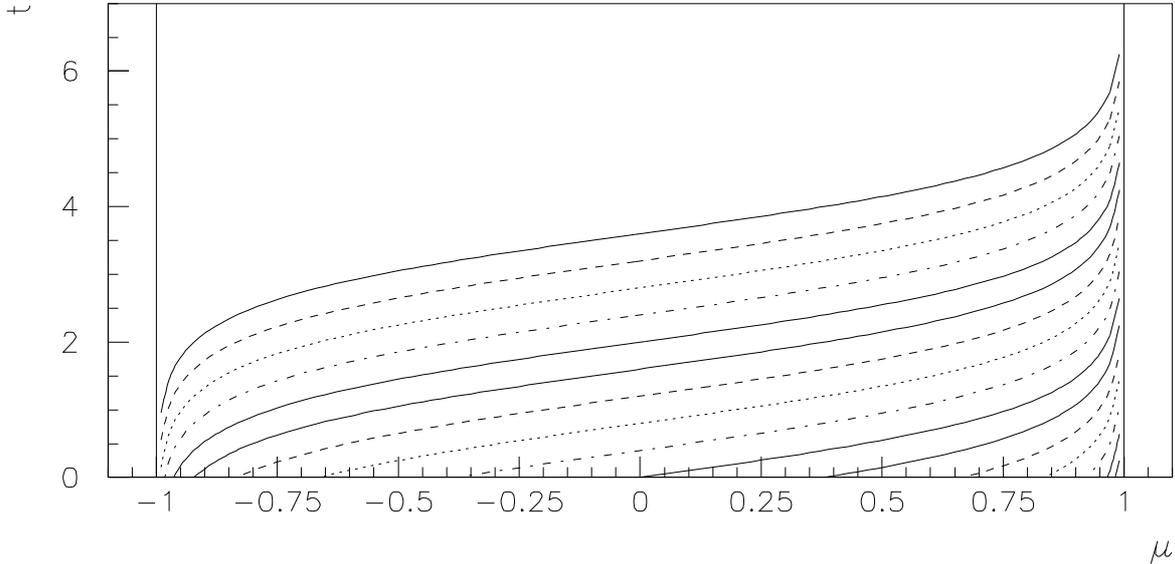
$$f(t, \mu) = f_0 \left(t - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right) \right) \quad (2.33)$$

Für die Charakteristiken ergibt sich folgende Bedingung:

$$\frac{dt}{dx} = 1 \quad \frac{d\mu}{dx} = 1 - \mu^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\mu} = \frac{1}{1 - \mu^2} \quad (2.34)$$

aus der die Charakteristiken als die Kurven (siehe Abbildung 2.5)

⁷Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird $v/(2L(s)) = 1$ gesetzt.

Abbildung 2.5: Die Charakteristiken des Fokussierungsterms in der μ - t -Ebene.

$$t - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right) = \text{const} \quad (2.35)$$

hervorgehen.

Für die Werte $\mu = \pm 1$ ergeben sich tangierende Charakteristiken. Physikalisch bedeutet dies, daß Teilchen, die entlang der Magnetfeldlinie fliegen und keine Gyrationbewegung ausführen, durch das divergierende Magnetfeld nicht beeinflußt werden. Alle anderen Teilchen mit $\mu \neq \pm 1$ nähern sich im Laufe der Zeit asymptotisch dem Wert $\mu = 1$, was physikalisch als magnetische oder adiabatische Fokussierung bezeichnet wird. Wie schnell dies geschieht, wird durch den Betrag des Quotienten $v/(2L(s))$ bestimmt. Da wegen der tangierenden Charakteristiken keine Teilchen das Pitchkosinusintervall $[-1,1]$ verlassen können, gilt die Teilchenzahlerhaltung.

Der Streuterm führt zu einer linearen PDGI zweiter Ordnung von parabolischem Typ⁸

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = 0 \quad \text{mit} \quad f(0, \mu) = f_0(\mu) \quad \text{für} \quad t = 0 \quad (2.36)$$

mit der Lösung

$$f(t, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\mu) e^{-n(n+1)t} \quad P_n(\mu) = \text{Legendre-Polynome} \quad (2.37)$$

$$\Rightarrow f_0(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\mu) \quad (2.38)$$

⁸Es wird hier vereinfachend angenommen, daß $\tilde{\kappa}(\mu) = A(1 - \mu^2)$, d. h. daß der PWSK isotrop ist.

Die Lösung läßt sich mit Hilfe eines Produktansatzes $f(t, \mu) = f_1(t) f_2(\mu)$ für den hier gewählten Spezialfall $\kappa(s, \mu) = 1 - \mu^2$ berechnen. Für kompliziertere Pitchwinkelstreuoeffizienten $\kappa(s, \mu)$ ist eine analytische Lösung nicht mehr möglich (siehe KUNSTMANN [1978B]). Wie man an der Lösung (2.37) erkennt, werden die höheren Ordnungen der Legendre-Polynome stärker gedämpft als die niedrigeren. Das konstante Legendre-Polynom $n = 0$ erfährt keine Dämpfung, was mit der Erhaltung der Gesamtteilchenzahl gleichzusetzen ist. Eine anisotrope Pitchwinkelverteilung wird somit im Laufe der Zeit durch den Prozeß der Pitchwinkelstreuung isotropisiert. Dies steht in deutlichem Gegensatz zur Wirkung des Fokussierungsterms, die schließlich alle Teilchen mit einem Anfangswert von $\mu \in (-1, 1)$ in dem Wert $\mu = 1$ vereint. Es ist dieses gegensätzliche Verhalten von Fokussierung und Pitchwinkelstreuung, das, bestimmt durch das Verhältnis dieser beiden Terme zueinander, die Pitchwinkelverteilung prägt.

2.2.2 Die stationäre Lösung: $\partial f / \partial t = 0$

Eine allgemeine Lösung für die stationäre Transportgleichung ist nicht bekannt. Dennoch gibt es einen Spezialfall der stationären Transportgleichung

$$L(s) \cdot \kappa(s, \mu) = \text{const}(\mu) \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_{||}(s)}{L(s)} = \text{const} \quad (2.39)$$

für den eine analytische Lösung berechnet werden kann und der daher eine große Bedeutung als Näherungslösung hat. Durch die Unabhängigkeit des Produkts aus Fokussierungslänge $L(s)$ und Pitchwinkelstreuoeffizient $\kappa(s, \mu)$ von der räumlichen Koordinate s ist eine Lösung mit Hilfe eines Produktansatzes möglich (vgl. KUNSTMANN [1979]; EARL [1981]):

$$f_s(s, \mu) = C_1 + C_2 \exp\left(-\int_{s_0}^s \frac{d\tilde{s}}{L(\tilde{s})}\right) \cdot \exp(G(\mu)) \quad (2.40)$$

$$\text{mit } G(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v}{2L(s)} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{1 - \tilde{\mu}^2}{\kappa(s, \tilde{\mu})} d\tilde{\mu} \quad (2.41)$$

Für den noch einschränkenderen Fall $L(s) = \text{const}$ und $\kappa(s, \mu) = \text{const}(\mu)$ ergibt sich:

$$f_s(s, \mu) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{s}{L}\right) \cdot \exp(G(\mu)) \quad (2.42)$$

Lösungen für spezielle $\tilde{\kappa}(\mu)$ können im Anhang A nachgeschlagen werden.

Einerseits ist es ein Glücksfall, daß die stationäre Lösung (2.40) analytisch angegeben werden kann, andererseits muß aber auf die Grenzen hingewiesen werden: Eine Anpassung der stationären Lösung an allgemeine Randbedingungen ist in der Form (2.40) nicht möglich. Das bedeutet aber, daß für eine Lösung auf einem endlichen räumlichen Gebiet die Randbedingungen identisch mit der durch die Gleichung (2.40) vorgegebenen Lösung sein müssen.

Eigene numerische Berechnungen der stationären Lösung haben dennoch gezeigt, daß bei hinreichendem räumlichen Abstand von den Rändern die Randbedingungen kaum noch Einfluß auf die Pitchwinkelverteilung haben. Wie groß im einzelnen dieser Abstand sein muß, hängt in besonderem Maße von dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ab. Ist die mittlere freie Weglänge $\lambda_{||}$

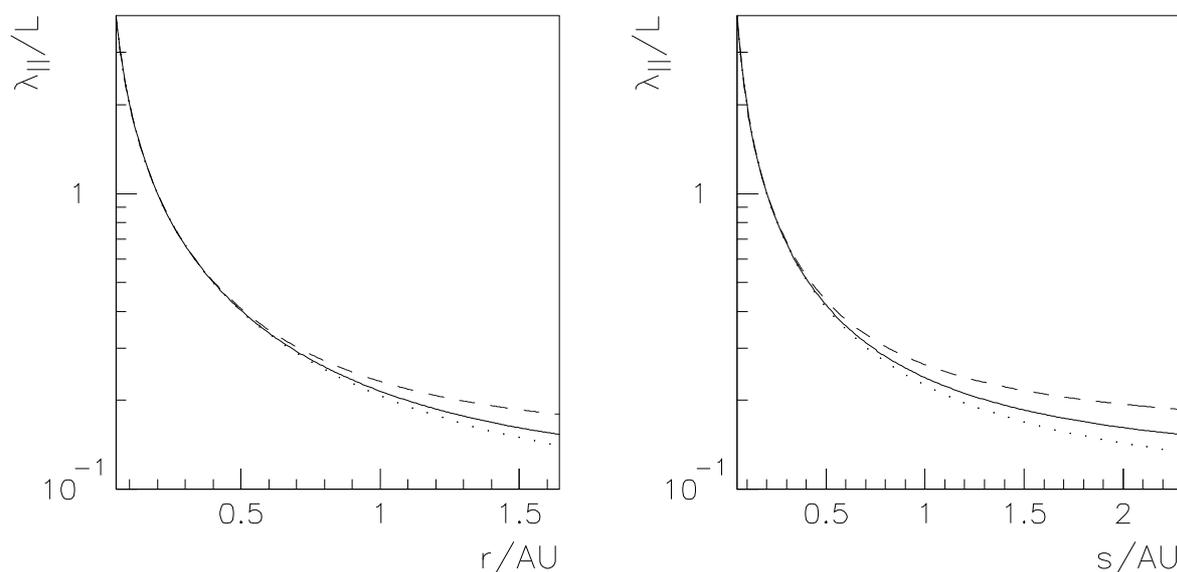


Abbildung 2.6: Das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ist in Abhängigkeit vom radialen Abstand r (links) und der Bogenlänge s entlang der Magnetfeldlinie dargestellt. Es ist $\lambda_r = 0.1$ AU und L bestimmt durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes. Dabei wird zwischen folgenden Sonnenwindgeschwindigkeiten v_{sw} unterschieden: $v_{sw} = 300$ km/s (gestrichelte Kurve), $v_{sw} = 400$ km/s (durchgezogene Kurve) und $v_{sw} = 500$ km/s (gepunktete Kurve).

und somit auch das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ klein, so ist der Einfluß der Randbedingung auf die unmittelbare Umgebung der Ränder begrenzt.

In der Abbildung 2.6 ist das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ in Abhängigkeit sowohl vom radialen Abstand r (links) als auch der Bogenlänge s dargestellt. Für eine als konstant angenommene radiale mittlere freie Weglänge $\lambda_r = 0.1$ AU und eine Fokussierungslänge L , die nach Gleichung (2.11) durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes bestimmt wird, ist das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ für die folgenden Sonnenwindgeschwindigkeiten v_{sw} aufgetragen: $v_{sw} = 300$ km/s (gestrichelte Kurve), $v_{sw} = 400$ km/s (durchgezogene Kurve) und $v_{sw} = 500$ km/s (gepunktete Kurve). Wie in Abbildung 2.6 ersichtlich wird, kommen die Kurven trotz unterschiedlicher Sonnenwindgeschwindigkeiten für geringe radiale Abstände zur Deckung. Mit zunehmendem radialen Abstand differieren die Kurven hingegen: je kleiner die Sonnenwindgeschwindigkeit ist, desto größer ist das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ für einen bestimmten radialen Abstand. Der Unterschied zwischen der gestrichelten Kurve und der durchgezogenen Kurve ist dabei deutlicher, als der zwischen der gepunkteten und der durchgezogenen Kurve, obwohl sich die Sonnenwindgeschwindigkeiten in beiden Fällen um 100 km/s unterscheiden.

Betrachtet man die Gleichung (2.11), die den radialen Verlauf der Fokussierungslänge $L(r)$ in Abhängigkeit von $\beta \cdot r$ und damit von der Sonnenwindgeschwindigkeit $v_{sw} \propto 1/\beta$ angibt, so wird deutlich, daß sich sowohl mit zunehmender Sonnenwindgeschwindigkeit, d. h. $\beta \rightarrow 0$, als auch mit geringer werdendem radialen Abstand r der Verlauf für ein Monopolfeld asymptotisch einstellt. Das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ läßt sich demnach für große Sonnenwindgeschwindig-

keiten und/oder für kleine radiale Abstände durch $2\lambda_{||}/r$ annähern. Daraus folgt, daß sich besonders für kleine radiale Abstände ein sich vom konstanten Verlauf deutlich unterschiedliches Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ergibt. Die stationäre Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen läßt sich daher nur eingeschränkt als Näherungslösung verwenden. Auf die einschränkenden Bedingungen wird in Abschnitt 5.3 detailliert eingegangen.

2.2.3 Das steady-state-Theorem

Die stationäre Lösung $f_s(s, \mu)$ ist durch ein bemerkenswertes Theorem⁹ mit der zeitabhängigen Lösung $f(t, s, \mu)$ verknüpft (siehe BIEBER [1996]):

Die über die Zeit integrierte zeitabhängige Pitchwinkelverteilung (PWV) $f(t, s, \mu)$ ist proportional zur stationären PWV $f_s(s, \mu)$. Dies gilt für beliebige Zeitprofile der Injektionsfunktion:

$$f_s(s, \mu) \propto \int_0^{\infty} f(t, s, \mu) dt \quad (2.43)$$

Betrachtet man die PWV an einem bestimmten Ort s_1 und entwickelt die μ -Abhängigkeit nach Legendre-Polynomen, so folgt für die Legendre-Koeffizienten der stationären Lösung¹⁰

$$g_{ns}(s = s_1) \propto \int_0^{\infty} g_n(t, s = s_1) dt \quad (2.44)$$

Das steady-state-Theorem läßt sich wegen der Orthogonalität der Legendre-Polynome auf die zeitabhängigen Legendre-Koeffizienten übertragen, nicht jedoch auf die Anisotropien ξ_{ns} . Die Anisotropien ξ_{ns} der stationären Lösung erhält man, indem man zunächst die Legendre-Koeffizienten g_{ns} der stationären Lösung nach Gleichung (2.44) bestimmt und dann die Quotienten nach Gleichung (1.22) g_{ns}/g_{0s} bildet.

Der ursprüngliche Beweis des Theorems von BIEBER [1996] konzentriert sich auf die Transportgleichung (2.1). Eine Verallgemeinerung kann aber ohne Probleme für lineare PD-Gls vorgenommen werden, deren Lösung beliebig oft differenzierbar ist und deren zeitliches Integral über die Quellfunktion beschränkt ist. Eine weitere wichtige Bedingung ist, daß die einzelnen Koeffizienten der PDGl bis auf die Quellfunktion **nicht** zeitabhängig sind.

Da der Beweis kurz ist, soll er anhand der folgenden einfachen PDGl vorgeführt werden:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = q(t, x) \quad (2.45)$$

Integration über die Zeit¹¹ führt zu:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dt + \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt = \int_0^{\infty} q(t, x) dt \quad (2.46)$$

⁹Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das Theorem als steady-state-Theorem bezeichnet, da diese Wortschöpfung prägnanter als "Stationäresgleichgewichtstheorem" erscheint.

¹⁰In der Praxis muß das Integral durch eine Summe berechnet werden, da die Meßdaten nur in endlicher Zeitauflösung vorliegen. Die Meßwerte sind dabei über das Meßintervall (bei dem Helios Datensatz des E6-Experiments in der Regel 15 Minuten) gemittelt, so daß sich bei der Summation eine Wichtung mit der Länge des Meßintervalls anbietet.

¹¹Die untere Integrationsgrenze wird auf $t = 0$ festgelegt, da angenommen wird, daß vor $t = 0$ keine Teilchen injiziert wurden. Allgemein kann die untere Grenze jedoch auf $t = -\infty$ erweitert werden.

Annahme: Das Integral auf der rechten Seite ist beschränkt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt = Q(x) \quad \text{mit} \quad Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} q(t, x) dt \quad (2.47)$$

Die Integration und die Differentiation werden vertauscht. Im Anhang B werden die dafür notwendigen Voraussetzungen sowie deren Gültigkeit für die Transportgleichung erörtert.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} f(t, x) dt = Q(x) \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x) = Q(x) \quad \text{mit} \quad F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t, x) dt \quad (2.49)$$

Dies ist die stationäre PDG1, die alternativ zur zeitabhängigen PDG1 gelöst werden muß. Nimmt man zusätzlich noch an, daß die Quellfunktion sich als Produktansatz

$$q(t, x) = q_1(t) \cdot q_2(x) \quad (2.50)$$

entlang der gesamten räumlichen Koordinate schreiben läßt, so folgt

$$\int_0^{\infty} q(t, x) dt = q_2(x) \int_0^{\infty} q_1(t) dt = C q_2(x) \quad \text{mit} \quad C \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} q_1(t) dt \quad (2.51)$$

und es kann direkt aus der Messung auf die Anzahl der (pro Längeneinheit der Feldlinie) injizierten Teilchen geschlossen werden, da $F(x)$ für

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x) = C q_2(x) \quad (2.52)$$

aus der Messung bekannt ist und $f_s(x)$ aus der Lösung der PDG1

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_s(x) = D q_2(x) \quad (2.53)$$

zu bestimmen ist. Dabei kann D willkürlich gewählt werden, während der räumliche Verlauf $q_2(x)$ bekannt sein muß. Ein Vergleich der beiden PDG1 führt so zu

$$C = D \frac{F(x)}{f_s(x)} \quad (2.54)$$

Der wesentliche Vorteil in der Anwendung des steady-state-Theorems liegt in der Möglichkeit, die zeitabhängige Lösung in die stationäre Lösung zu überführen. Die stationäre Lösung ist um die Dimension der Zeit reduziert und stellt damit ein einfacheres Problem dar. Speziell der zeitliche Verlauf der Quellfunktion, der die zeitabhängige Lösung wesentlich prägt, ist im allgemeinen nicht exakt bekannt, so daß man auf Annahmen angewiesen ist. Diese Annahmen, die natürlich mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind, entfallen, wenn man die gemessenen zeitabhängigen PWVs auf die entsprechenden stationären Lösungen zurückführt.

Für die Auswertung der Meßdaten ist es daher entscheidend, die stationären Lösungen für allgemeine Ausbreitungsbedingungen zu berechnen. In Abschnitt 3.3 wird speziell auf dieses Problem eingegangen.

2.2.4 Die Transportgleichung in konservativer Form

Die Transportgleichung hat den Charakter einer Erhaltungsgleichung der Teilchenzahl pro Längeneinheit der Flußröhre (vgl. KUNSTMANN [1978A]). Um dies deutlich zu machen, bietet es sich an, die Transportgleichung in konservativer Form (vgl. FARLOW [1993], S. 213f.) zu schreiben. Die Teilchenzahl pro Längeneinheit ζ , auch als *lineare Dichte* bezeichnet, ergibt sich durch Multiplikation der Phasenraumdicke $f(t, s, \mu)$ mit dem Flußröhrenquerschnitt $A(s)$ (vgl. KUNSTMANN [1979])

$$\zeta(t, s, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} A(s) \cdot f(t, s, \mu) \quad (2.55)$$

Aus der Konstanz des magnetischen Flusses

$$\phi = B(z) \cdot A(z) = \text{const} \quad (2.56)$$

ergibt sich (siehe SCHLÜTER [1985], S. 23)

$$\frac{1}{L(s)} = \frac{1}{A(s)} \frac{\partial A(s)}{\partial s} \Rightarrow A(s) = A_0 \exp\left(\int_{s_0}^s \frac{d\tilde{s}}{L(\tilde{s})}\right) \quad (2.57)$$

Damit kann die Transportgleichung (2.1) in folgende Form umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (v\mu\zeta) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(v \frac{1-\mu^2}{2L(s)} \zeta \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\kappa(s, \mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right) = 0 \quad (2.58)$$

Integration über das Pitchkosinusintervall $[-1, 1]$ ergibt wegen des identisch verschwindenden Diffusionsstroms $\kappa(s, \mu) \partial \zeta / \partial \mu = 0$ für $\mu = \pm 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^{+1} \zeta(\mu) d\mu + v \frac{\partial}{\partial s} \int_{-1}^{+1} \mu \zeta(\mu) d\mu = 0 \quad (2.59)$$

Dies führt zu der wohlbekannten *Kontinuitätsgleichung*¹² (vgl. LANDAU UND LIFSCHITZ [1991], S. 2)

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} |\mathbf{S}_p| = 0 \quad (2.61)$$

mit

$$U_p \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{+1} \zeta(\mu) d\mu \quad \text{Teilchendichte} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{S}_p \stackrel{\text{def}}{=} v \int_{-1}^{+1} \mu \zeta(\mu) d\mu \cdot \hat{e}_B \quad \text{Stromdichtevektor entlang des Magnetfeldes} \quad (2.63)$$

¹²Integration der Kontinuitätsgleichung über das gesamte Gebiet $[s_0, s_1]$, in dem sich die Teilchen bis zum Zeitpunkt t ausgebreitet haben, führt zu der Erhaltung der Gesamtteilchenzahl N

$$\frac{dN}{dt} = 0 \quad \text{mit} \quad N \stackrel{\text{def}}{=} \int_{s_0}^{s_1} \int_{-1}^{+1} \zeta(t, s, \mu) d\mu ds \quad (2.60)$$

Unter Verwendung der Legendre-Polynome $P_n(\mu)$ und den daraus abgeleiteten Legendre-Koeffizienten g_n (siehe Abschnitt 1.5) lassen sich die Teilchendichte U_p und der Stromdichtevektor \mathbf{S}_p auch folgendermaßen schreiben:

$$U_p = 2g_0 \quad \text{bzw.} \quad |\mathbf{S}_p| = \frac{2}{3}vg_1 \quad (2.64)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt unmittelbar die räumliche Konstanz der Stromdichte $|\mathbf{S}_p|$ für stationäre Verhältnisse. Dies wird deutlich bei der Transformation der stationären Lösung (2.40) auf die lineare Dichte

$$\zeta(\mu) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \exp\left(\frac{v}{2L(s)} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{1 - \tilde{\mu}^2}{\kappa(s, \tilde{\mu})} d\tilde{\mu}\right) \quad (2.65)$$

bei der die räumliche Abhängigkeit entfällt.

Die Stromdichte $|\mathbf{S}_p|$ hat einen Wert verschieden von null, solange die Fokussierungslänge $L(s)$ endliche Werte annimmt. Erst im Grenzübergang $\lim_{L \rightarrow \infty}$ geht die stationäre Lösung (2.40) in einen isotropen Funktionsverlauf über. Es ist daher nur der Fokussierung zuzuschreiben, daß im stationären Gleichgewicht eine anisotrope Pitchwinkelverteilung (PWV) vorhanden ist. Anisotrope stationäre PWVs sind daher nicht mit der Transportgleichung für ein homogenes Magnetfeld konsistent, bei der der Fokussierungsterm identisch verschwindet! Die Pitchwinkelstreuung führt in Abwesenheit von Fokussierung zu einer isotropen PWV, die keine Rückschlüsse auf die Form des PWSK zulassen würde. Der Betrag der Anisotropie (siehe Gleichung (1.14))

$$\xi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3|\mathbf{S}_p|}{vU_p} = \frac{g_1}{g_0} \quad (2.66)$$

als Maß für die Bündelung der PWV wird in entscheidender Weise durch das Produkt $L(s) \cdot \kappa(s, \mu)$ geprägt, wie aus der Gleichung (2.40) bzw. (2.65) ersichtlich ist.

Einsetzen des PWSK nach Gleichung (2.24) in die Transportgleichung und Division durch die Geschwindigkeit v führt zu

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1 - \mu^2}{2L(s)} \frac{\partial f}{\partial \mu} - \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda_{\parallel}(s)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\bar{\kappa}(\mu) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = 0 \quad (2.67)$$

$$\text{mit } \tau \stackrel{\text{def}}{=} v \cdot t \quad (2.68)$$

Auf der neuen "Zeitskala" τ , die die Dimension einer Länge hat, verhalten sich somit die Lösungen der Transportgleichung für unterschiedliche Geschwindigkeiten v identisch. Dies ist ein großer Vorteil, da eine Berechnung der Lösungen für verschiedene Geschwindigkeiten v entfällt, so daß die stationären Lösungen der Transportgleichung nur einmal berechnet werden müssen. Befindet sich auf der rechten Seite der Transportgleichung ein zeitabhängiger Quellterm $q(t, s, \mu)$, so ist darauf zu achten, daß dieser in Gleichung (2.67) ebenfalls mit v skaliert wird:

$$\tilde{q}(\tau, s, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{v} q(t, s, \mu) \quad (2.69)$$

Schreibt man Gleichung (2.67) noch in konservativer Form, so ergibt sich letztendlich:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{1}{2L(s)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \zeta \right) - \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda_{\parallel}(s)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\bar{\kappa}(\mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right) = 0 \quad (2.70)$$

Die Schreibweise in konservativer Form hat den Vorteil, daß bei der im weiteren Verlauf der Arbeit zu entwickelnden numerischen Approximation der Transportgleichung der Charakter einer Erhaltungsgleichung berücksichtigt werden kann.

2.3 Analytische Näherungslösungen der Transportgleichung

Für den Fall eines homogenen Magnetfeldes ($L = \infty$) geben HASSELMANN AND WIBBERENZ [1968, 1970] eine analytische Näherungslösung an. Unter der Voraussetzung, daß sich die PWV nur langsam in den Variablen Zeit, Ort und Pitchkosinus ändert, kann die Transportgleichung auf eine Diffusionsgleichung der omnidirektionalen Intensität in der räumlichen Koordinate zurückgeführt werden. Es wird daher auch von der *diffusiven Näherung* gesprochen, deren Gültigkeitsbereich aufgrund der einschränkenden Voraussetzungen auf die Spätphase von solaren Ereignissen beschränkt ist.

GREEN [1992], S. 79 erweitert die diffusive Näherung unter den gleichen Einschränkungen auf inhomogene Magnetfelder (siehe Abschnitt 5.1).

EARL [1974] entwickelt zunächst unter der Annahme eines homogenen Magnetfeldes ($L = \infty$) den Diffusionsterm nach Streu-Eigenfunktionen, was einer Formulierung der Transportgleichung in Matrizenform gleichkommt, die mit Hilfe von Fouriermethoden zu lösen ist. Eine Erweiterung auf inhomogene Magnetfelder (fokussierte Diffusion) und eine damit verbundene Entwicklung nach Fokussierungs-Eigenfunktionen erfolgt durch EARL [1976]. Während EARL [1976] sich auf eine Entwicklung erster Ordnung beschränkt, führt BIEBER [1977] die Methode zu einer Entwicklung dritter Ordnung mit der Einschränkung, daß die räumliche Anfangsbedingung einer Gaußglockenkurve entspricht. Nachteil beider Entwicklungen ist die Begrenzung auf den unrealistischen Fall einer konstanten Fokussierungslänge $L = \text{const.}$

Eine Anwendung von EARLS [1976] Methode findet sich in MA SUNG AND EARL [1978]. Die Autoren fitten die Zeit-Intensitätsprofile von 30 solaren Ereignissen — sowohl Protonen als auch Elektronen — unter der Annahme einer gaußförmigen Injektionsfunktion.

Die Methode von BIEBER [1977] findet ihre Anwendung in der Auswertung der zeitlichen Entwicklung einer gemessenen PWV durch BIEBER ET AL. [1979, 1980]. Es handelt sich dabei um Messungen von Protonen und Elektronen (im MeV-Bereich) des solaren Ereignisses vom 26. März 1978, die mit dem Kieler Experiment auf dem HELIOS 2-Satelliten vorgenommen wurden.

Einen anderen Zugang wählt KUNSTMANN [1979], indem er den divergierenden Effekt des Magnetfeldes durch die Einführung der linearen Dichte abspaltet, um dann mit einer Störungsrechnung fortzufahren.

EARL [1981] übernimmt die von KUNSTMANN [1979] angegebene stationäre Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen und nutzt sie seinerseits als nullte Näherung für eine Störungsrechnung. Dadurch ist es ihm möglich, beliebige räumliche Verläufe sowohl für den Streukoeffizienten als auch für die Fokussierungslänge zu berücksichtigen.

Eine Erweiterung der Störungsrechnung auf Terme quadratischer Ordnung vollzieht EARL [1989] und kann so den Effekt der Dispersion des durch ein Gaußprofil angenäherten Teilchentransports berücksichtigen. Aber auch hier beschränkt sich EARL auf die Beschreibung von symmetrischen PWSKs, d. h. Effekte durch magnetische Helizität werden nicht berücksichtigt.

Da die Entwicklung nach Fokussierungs-Eigenfunktionen zu aufwendigen Berechnungen von Matrixeigenwertproblemen führt, glaubte man mit der Arbeit von BIEBER [1977] hier zu einem Abschluß gekommen zu sein. PAULS [1994] und PAULS AND BURGER [1994] gelang es jedoch, die Entwicklung zu noch höheren Ordnungen fortzuführen. Moderne Rechenprogramme wie z. B. *Mathematica*, *Maple*, *REDUCE* u. a., die sowohl numerische als auch analytische Rechnungen durchführen können, ermöglichen eine Automatisierung des Rechengangs, wodurch die Entwicklung im Prinzip bis zu einer beliebigen Entwicklungsordnung fortgeführt werden kann. PAULS AND BURGER [1994] beschränken sich auf eine Entwicklung bis zur siebten Ordnung und erhalten so bereits nach einer relativ kurzen Zeitspanne nach der Injektion, die mit einem Gültigkeitskriterium zu bestimmen ist, eine äußerst genaue Lösung. Zusätzlich kann der Effekt der magnetischen Helizität berücksichtigt werden. Vorteil der Methode von PAULS AND BURGER [1994] ist die Durchführbarkeit der Berechnungen auf einer Rechenmaschine mit geringer Rechenkapazität wie z. B. einem durchschnittlichen PC. Nachteil ist aber weiterhin die Beschränkung auf eine räumlich konstante Fokussierungslänge und einen räumlich konstanten Streukoeffizienten.

Es handelt sich hierbei um ein grundsätzliches Problem analytischer Näherungslösungen (vgl. FARLOW [1993], S. 324). Einerseits geben die analytischen Näherungslösungen Einblick in die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Variablen, so daß man ein Verständnis für die durch die Transportgleichung beschriebenen Prozesse entwickelt. Andererseits handelt es sich um Näherungslösungen, die immer nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich aufweisen. Dabei ist besonders die Beschränkung auf eine räumlich konstante Fokussierungslänge sowie konstante Streukoeffizienten unrealistisch, wie der Vergleich mit den Lösungen für eine durch die Archimedische Spirale bestimmte Fokussierungslänge zeigt (siehe RUFFOLO [1995]). Ist man an Lösungen für sehr allgemeine Anfangs- und Randbedingungen sowie für eine räumlich variable Fokussierungslänge und räumlich variable Streukoeffizienten interessiert, so sind die numerischen Lösungsmethoden vorzuziehen.

2.4 Numerische Näherungslösungen der Transportgleichung

Neben den im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten analytischen Methoden sollen nun die rein numerischen Methoden kurz vorgestellt werden. Es gibt im Prinzip zwei Lösungswege, um die Transportgleichung zu lösen:

1. Der eine Lösungsweg erfolgt über das sogenannte *Monte-Carlo-Verfahren*. Hierbei geht man wieder auf die elementare Ebene der einzelnen Teilchen zurück und verfolgt deren Bahn im Phasenraum, wie man es z. B. auch für einfachere Systeme wie die Brownsche Molekularbewegung (siehe CHANDRASEKAR [1943]) durchführen kann. Vorteil dieser Methode ist die Nähe zum physikalischen Elementarprozeß; ihr Nachteil ist die große Anzahl von Teilchen, deren Bahn man verfolgen muß, um eine ausreichend gute Statistik zu erhalten.

Es hat schon recht frühzeitig Anstrengungen gegeben, die Transportgleichung mittels eines Monte-Carlo-Verfahrens zu berechnen [VERNOV ET AL., 1970], und auch im späteren Verlauf haben Autoren diesen Weg immer wieder eingeschlagen [PALMER, PALMEIRA, AND ALLUM, 1975; OWENS AND GOMBOSI, 1980; PALMER AND JOKIPII, 1981; u. a.]. Aber erst EARL [1987] gelang es unter Einsatz eines sehr leistungsstarken Parallelrechners, die Bahn von 63 995 904 Teilchen zu berücksichtigen, wodurch er das

Statistikproblem vermeidet. Leider beschränkt EARL auch in den folgenden Arbeiten [EARL, 1992; EARL, 1994; EARL ET AL. 1995] das Monte-Carlo-Verfahren auf den Fall eines homogenen Magnetfeldes ($L = \infty$).

2. Der andere Lösungsweg, der im folgenden eingeschlagen werden soll, erfolgt durch eine Diskretisierung des auf dem Definitionsbereich kontinuierlich formulierten Problems. Bei der Methode der *finiten Differenzen* werden dabei die partiellen Ableitungen, die in der Ausgangsgleichung auftreten, durch algebraische Differenzenquotienten ersetzt. Dies führt zu einem System von algebraischen Gleichungen, die auf den jeweiligen Gitterpunkten des Definitionsbereichs gelöst werden müssen. Da die auftretenden algebraischen Gleichungen häufig miteinander gekoppelt sind, sind die in der Linearen Algebra entwickelten Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen von besonderer Bedeutung. Die Methode der finiten Differenzen wurde, angefangen mit NG AND WONG [1979], in zahlreichen Arbeiten [GOMBOSI AND OWENS, 1980; OWENS AND GOMBOSI, 1981; WONG, 1982; KÓTA ET AL., 1982; SCHLÜTER, 1985; RUFFOLO, 1991; RUFFOLO, 1995; ZHANG, 1995] verwendet. Die Approximation durch finite Differenzen bringt jedoch einige Schwierigkeiten mit sich, auf die in der Vergangenheit zu Recht hingewiesen wurde [EARL, 1985; NG, 1990]. Speziell die Arbeiten von GOMBOSI AND OWENS [1980] und OWENS AND GOMBOSI [1981] sind ein Beispiel dafür, daß eine unsachgemäße Anwendung des (finite) Differenzenverfahrens zu sehr ungenauen Ergebnissen führen kann.

Es soll hier aber nicht der Eindruck erweckt werden, daß die bei der Umsetzung in ein Differenzenverfahren auftretenden Schwierigkeiten prinzipiell nicht zu beherrschen sind. Die Lösung der Transportgleichung mittels finiter Differenzen stellt zwar kein Modellproblem dar, ist aber mit fortgeschrittenen numerischen Algorithmen zu bewältigen. Der Bereich der numerischen Mathematik hat in den letzten Jahren in Verbindung mit der Verbreitung des Computers eine rasante Entwicklung durchgemacht, so daß mittlerweile eine Vielzahl von numerischen Methoden existiert.

Kapitel 3

Das Differenzenverfahren

Im folgenden Kapitel wird die Approximation der Transportgleichung durch finite Differenzen durchgeführt. Der Leser, der nicht an den hier vorgestellten mathematischen Methoden interessiert ist, kann dieses Kapitel überschlagen. Es sei dennoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß erst diese Methoden es ermöglichen, zuverlässige numerische Lösungen für allgemeine Ausbreitungsbedingungen zu berechnen, die die Grundlage für den Vergleich mit den gemessenen Daten bilden.

3.1 Die Anforderungen an das Differenzenverfahren

Bevor die Diskretisierung der Transportgleichung vorgenommen wird, ist es notwendig, die gestellten Anforderungen an das Differenzenverfahren klar zu formulieren. Zur besseren Übersicht werden die Anforderungen in folgende Bereiche untergliedert:

1. Die mathematischen Anforderungen für lineare PDGLs setzen für das Differenzenschema Stabilität und Konsistenz voraus. Die Integration von PDGLs in der Zeit kann grob gesagt auf die Integration eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems zurückgeführt werden (vgl. J. D. ANDERSON ET AL. [1992], S. 187f.). Daher ist es angebracht, die Eigenschaften von Differenzenverfahren wie Konsistenz und Stabilität anhand von gewöhnlichen Differentialgleichungen einzuführen. Mathematisch exakte Definitionen dieser Begriffe findet man z. B. bei GROSSMANN UND ROOS [1994], S. 18. Die Stabilität eines Differenzenverfahrens kann man sich anschaulich so vorstellen, daß sich die bei einer Rechenmaschine unvermeidlichen Rundungsfehler im Laufe der Rechnung nicht verstärken und unbeschränkt anwachsen. Die Konsistenz ist entsprechend gleichzusetzen mit der korrekten Approximation des Differentialoperators im Diskreten.

Liegen sowohl Stabilität als auch Konsistenz eines Differenzenverfahrens für eine lineare PDGL vor, so ist das Verfahren nach *Lax' Äquivalenztheorem* (siehe RICHTMYER AND MORTON [1967], S. 45f.) konvergent. Man definiert Konvergenz auch folgendermaßen (vgl. GROSSMANN UND ROOS [1994], S. 17):

Ein Differenzenverfahren heißt konvergent von der Ordnung k in der *Maximumsnorm*, wenn gilt

$$\max_i |\zeta(x_i) - \zeta_i| \leq C \Delta x^k \quad (3.1)$$

- d. h. der Wert der numerischen Lösung mit der größten Abweichung von der exakten Lösung wird unter die Schranke $C\Delta x^k$ gedrückt. Für den Grenzwert $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ streben somit alle Werte der numerischen Lösung gegen die exakte Lösung. Die Konstante C ist unmittelbar mit der gewählten Diskretisierung verknüpft und prägt entscheidend die Genauigkeit der numerischen Lösung, da Δx , beschränkt durch die zur Verfügung stehende Rechenkapazität, nicht beliebig verkleinert werden kann.
2. Die physikalischen Anforderungen ergeben sich aus dem Umstand, daß die Transportgleichung einen physikalischen Sachverhalt beschreibt und somit physikalischen Prinzipien unterworfen ist. Es gilt, die Einhaltung dieser Prinzipien über die mathematische Approximationsordnung zu stellen. Ein klassisches Beispiel aus der Numerik stellt die Diskretisierung der Schwingungsgleichung eines harmonischen Oszillators dar, bei der es bei einer ungeschickten Wahl des Differenzenverfahrens wie z. B. eines leapfrog-Schemas zu einer Abhängigkeit der Periode von der Wahl des Zeitschrittes kommen kann (vgl. HOCKNEY AND EASTWOOD [1988], S. 107ff.).
Für die hier zu betrachtende Transportgleichung werden zwei Anforderungen an das Differenzenverfahren gestellt:
 - (a) Das Differenzenverfahren muß konservativ sein, d. h. es muß den Charakter der Erhaltungsgleichung (2.58) bewahren und darf weder Phasenraumdichte erzeugen noch vernichten.
 - (b) Eine negative Phasenraumdichte ist nicht definiert und darf daher vom Differenzenverfahren nicht erzeugt werden.
 3. Die nur begrenzt zur Verfügung stehende Rechenkapazität legt eine im Verhältnis zum Rechenaufwand möglichst hohe Konvergenzordnung des Differenzenverfahrens nahe. Eine quadratische Konvergenzordnung in allen Variablen ist, wenn möglich, anzustreben, um mit der durch die Rechenkapazität begrenzten Gitterauflösung eine zufriedenstellende numerische Approximation zu gewährleisten.

3.2 Die Approximation durch finite Differenzen

Die Diskretisierung der Transportgleichung ist bereits ein so komplexes Problem, daß es angebracht ist, in drei Schritten vorzugehen:

1. Diskretisierung des räumlichen-Transportes bzw. s -Transportes (Abschnitt 3.2.1.1)
2. Diskretisierung des Pitchwinkel-Transportes bzw. μ -Transportes (Abschnitt 3.2.2)
3. Zusammenfügen des s - und μ -Transportes zum vollständigen Differenzenverfahren (Abschnitt 3.2.3)

Dabei ist das äquidistante Gitter, auf dem die Differenzengleichungen gelöst werden sollen, folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{ll}
 \mu\text{-Gitter:} & \mu_i = -1 + \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta\mu \quad i = 0, 1, \dots, I - 1 \quad \text{mit} \quad I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\Delta\mu} \\
 s\text{-Gitter:} & s_j = j \Delta s \quad j = 0, 1, \dots, J \\
 \tau\text{-Gitter:} & \tau^n = n \Delta\tau \quad n = 0, 1, \dots, N
 \end{array}$$

3.2.1 Der s -Transport

3.2.1.1 Die Diskretisierung

Die lineare Advektionsgleichung (von hyperbolischem Typ)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + a \frac{\partial \zeta}{\partial s} = 0 \quad \text{mit } a \stackrel{\text{def}}{=} \mu_i, \mu_i > 0 \quad (3.2)$$

läßt sich mit dem expliziten *first-order-upwind-Verfahren* (siehe GROSSMANN UND ROOS [1994], S. 385ff.) diskretisieren:

$$\begin{aligned} \zeta_j^{n+1} &= \zeta_j^n - \gamma_i (\zeta_j^n - \zeta_{j-1}^n) \\ \text{bzw. } \zeta_j^{n+1} &= \zeta_j^n - \gamma_i (\zeta_j^n - \zeta_{j+1}^n) \quad \text{für } \mu_i < 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit $\gamma_i = |\mu_i| \frac{\Delta \tau}{\Delta s}$ und der Stabilitätsbedingung¹

$$\gamma \leq 1 \quad (\text{Courant-Friedrichs-Levi-Bedingung}) \quad (3.4)$$

Ist die *CFL-Bedingung* erfüllt, so ist das explizite Schema stabil in der Maximumsnorm, konsistent und konvergent von der Ordnung eins. Zudem gilt das Maximumsprinzip (inverse Monotonie bzw. von monotoner Art)

$$\inf_j \zeta_j^n \leq \zeta_j^{n+1} \leq \sup_j \zeta_j^n \quad (3.5)$$

d. h. durch den minimalen und maximalen Funktionswert der Anfangs- und Randbedingung wird der Bereich, in dem die Lösung im zeitlichen Verlauf variiert, festgelegt. Speziell für positive Anfangs- und Randbedingungen ergeben sich ausschließlich positive Funktionswerte.

Das first-order-upwind-Verfahren erfüllt somit die Bedingung, daß keine negativen Funktionswerte erzeugt werden. Außerdem ist es konservativ, da der Betrag, der an einem Gitterpunkt subtrahiert wird, am benachbarten Gitterpunkt wieder addiert wird.

Typisch für explizite Verfahren ist die Stabilitätsbedingung, die den Zeitschritt $\Delta \tau$ an die räumliche Gitterweite Δs koppelt. Explizite Verfahren haben den Vorteil, daß die Funktionswerte ζ_j^{n+1} der $(n+1)$ -ten Zeitschicht sukzessiv aus den Funktionswerten ζ_j^n der n -ten Zeitschicht berechnet werden können. Im Gegensatz dazu berechnen implizite Verfahren alle Funktionswerte ζ_j^{n+1} gleichzeitig, indem ein Gleichungssystem invertiert wird, das alle ζ_j^{n+1} mit allen ζ_j^n koppelt. Im allgemeinen ist dadurch der Rechenaufwand für implizite Verfahren größer, dafür kann der Zeitschritt aber beliebig gewählt werden, da kein Stabilitätskriterium die Wahl des Zeitschrittes beschränkt (vgl. J. D. ANDERSON ET AL. [1992], S. 93). Für die hier zu berechnende Advektionsgleichung ist es jedoch nicht angebracht, ein implizites Verfahren zu wählen, da sich die Lösung auf kleinen zeitlichen Skalen ändert und ein zu großer Zeitschritt zu numerischen Lösungen führt, die die analytische Lösung nur sehr schlecht approximieren. Außerdem bringen implizite Verfahren durch die Berechnung eines Funktionswertes ζ_j^{n+1} unter Einbeziehung aller ζ_j^n eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Information mit sich (vgl. ROACH [1982], S. 85f.), was im Gegensatz zu der analytischen Lösung der Advektionsgleichung steht.

¹Da nach der Gleichung (2.68) $\Delta \tau = v \Delta t$ ist, bedeutet dies, daß der eigentliche Zeitschritt Δt mit zunehmender Geschwindigkeit v immer kleiner gewählt werden muß, um die Stabilitätsbedingung einzuhalten.

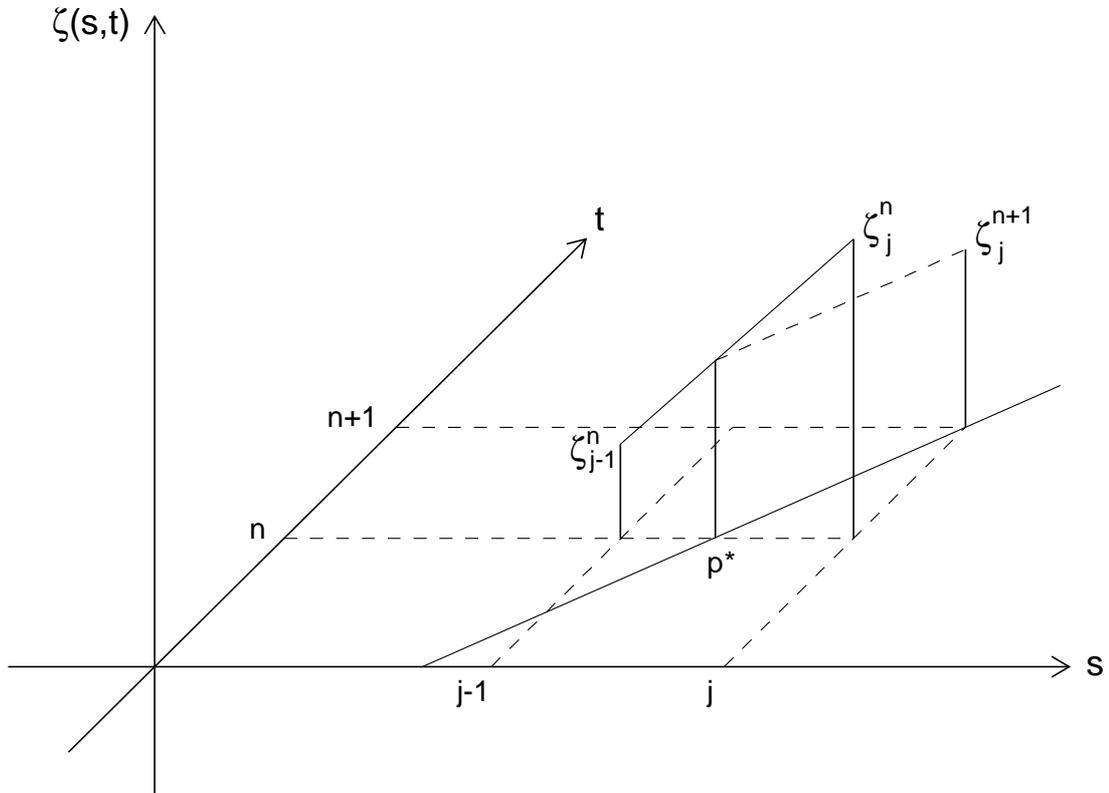


Abbildung 3.1: Drei ausgewählte Funktionswerte ζ_i^n sind über der s - t -Ebene dargestellt. Die durch den Gitterpunkt $(j, n + 1)$ führende Charakteristik ist eingezeichnet und kann auf die n -te Zeitschicht zurückverfolgt werden, die im Punkt P^* geschnitten wird.

Die Lösung der Advektionsgleichung (siehe Abschnitt 2.2) läßt erkennen, daß sich die Anfangsverteilung ζ_0 mit der endlichen Geschwindigkeit a entlang der räumlichen Koordinate s ausbreitet. Ist die Anfangsverteilung eine monotone Funktion, so wird diese Eigenschaft durch den Transportvorgang nicht verändert. Es ist daher naheliegend zu fordern, daß die monotonieerhaltende Eigenschaft

$$\zeta_j^0 \leq \zeta_{j+1}^0 \text{ bzw. } \zeta_j^0 \geq \zeta_{j+1}^0 \quad \Rightarrow \quad \zeta_j^n \leq \zeta_{j+1}^n \text{ bzw. } \zeta_j^n \geq \zeta_{j+1}^n$$

auch von dem numerischen Verfahren erfüllt wird, so wie es ROE [1986] ausführlich diskutiert.

Er weist darauf hin, daß es kein Schema gibt, das zweiter Ordnung und gleichzeitig monotonieerhaltend ist. Dies wird auch als Godunov's Theorem bezeichnet. Godunov hat außerdem gezeigt, daß das monotonieerhaltende lineare Schema mit dem geringsten Approximationsfehler das first-order-upwind-Schema ist.

Die Tatsache, daß das first-order-upwind-Schema monotonieerhaltend ist, läßt sich anhand der Abbildung 3.1 erkennen. Es ist die Charakteristik eingezeichnet, die den Gitterpunkt $(j, n + 1)$ schneidet. Während des Zeitschrittes $\Delta\tau$ ist die Information somit auf dieser Charakteristik vom Punkt P^* zu dem Gitterpunkt $(j, n + 1)$ gewandert. Das first-order-upwind-

Verfahren kann nun als lineare Interpolation des Funktionswertes am Punkt P^* aufgefaßt werden.

Gilt die CFL-Stabilitätsbedingung, d. h. $\gamma \leq 1$, so liegt der Punkt P^* immer in dem Intervall $[j-1, j]$. Dadurch wird aber der monotone Verlauf der Anfangsbedingung gewahrt. Ist die CFL-Stabilitätsbedingung hingegen verletzt, so handelt es sich bei dem Verfahren nicht mehr um eine Interpolation, sondern um eine Extrapolation. Dies führt zu einem nicht stabilen Schema.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß das first-order-upwind-Schema von der Konvergenzordnung eins ist. Um den daraus resultierenden Diskretisierungsfehler zu ermitteln, ist es üblich, die Gleichung (3.3) in einer Taylorreihe zu entwickeln (siehe D. A. ANDERSON ET AL. [1984], S. 85):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \mu_i \frac{\partial \zeta}{\partial s} = -\frac{\Delta \tau}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \mu_i \frac{\Delta s}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} - \frac{(\Delta \tau)^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \tau^3} - \mu_i \frac{(\Delta s)^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial s^3} + \dots \quad \text{mit } \mu_i > 0 \quad (3.6)$$

Statt nur die linke Seite der Gleichung zu lösen, wird durch das first-order-upwind-Schema eine PDGl gelöst, die wesentlich komplexer ist als die Advektionsgleichung und deren Zusatzterme auf der rechten Seite aufgeführt sind. Zum besseren Verständnis der Gleichung (3.6) können die zeitlichen Ableitungen in räumliche Ableitungen umgewandelt werden, so daß man folgende *modifizierte Gleichung* (siehe WARMING AND HYETT [1974]) erhält:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \mu_i \frac{\partial \zeta}{\partial s} &= \frac{\mu_i \Delta s}{2} (1 - \gamma) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} - \frac{\mu_i (\Delta s)^2}{6} (2\gamma^2 - 3\gamma + 1) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial s^3} \\ &+ O[(\Delta s)^3, (\Delta s)^2 \Delta \tau, \Delta s (\Delta \tau)^2, (\Delta \tau)^3] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Beträgt $\gamma = 1$, so ist zu erkennen, daß der Diskretisierungsfehler verschwindet. Das first-order-upwind-Schema ist für diesen Spezialfall exakt, da der oben definierte Schnittpunkt P^* der Charakteristik mit der n -ten Zeitebene genau durch den Punkt ζ_{j-1}^n führt. Aus der Gleichung (3.3) wird somit

$$\begin{aligned} \zeta_j^{n+1} &= \zeta_{j-1}^n \quad \text{für } \mu_i > 0 \\ \text{bzw. } \zeta_j^{n+1} &= \zeta_{j+1}^n \quad \text{für } \mu_i < 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Es erscheint somit erstrebenswert, die Gitterweiten des räumlichen und zeitlichen Rasters so zu wählen, daß $\gamma = 1$ erfüllt ist. Dies ist aber eine wesentlich stärkere Restriktion als die bisherige Bedingung $\gamma \leq 1$. Hinzu kommt die Schwierigkeit, daß die Restriktion $\gamma = \mu_i \Delta \tau / \Delta s$ für alle μ_i bei gleichem Δs und $\Delta \tau$ gelten muß. Dies ist natürlich nicht zu erfüllen. Betrachtet man erneut das Bild der Charakteristik, so ist zu erkennen, daß eine exakte Approximation auch dann möglich ist, wenn sich die Information um Vielfache von Δs während eines Zeitschrittes fortpflanzt. Dies ist gleichbedeutend mit $\gamma = l$, $l \in \mathbb{N}$. Wählt man nun bei einem äquidistanten μ -Gitter das räumliche und das zeitliche Raster so, daß für den kleinsten μ_i Wert μ_{\min} die Bedingung $\gamma = 1$ erfüllt ist, so ergibt sich für die anderen γ -Werte ein ganzzahliges Vielfaches. Diese Methode des exakten s -Transportes verwendet RUFFOLO [1991] in seinem numerischen Verfahren. Ein erheblicher Nachteil dabei ist das Stabilitätskriterium $\Delta s = \mu_{\min} \Delta \tau$, das bei einem feinauflösenden μ -Gitter und damit kleinen μ_{\min} zu sehr kleinen räumlichen Gitterweiten Δs bei vorgegebener zeitlicher Gitterweite $\Delta \tau$ zwingt. Dies führt wiederum zu einem hohen Rechenaufwand, der einen großen Bedarf an CPU-Zeit und Arbeitsspeicher zur Folge hat.

Um diesen hohen Rechenaufwand zu umgehen und trotzdem die Vorteile der exakten Diskretisierung zu nutzen, können Δs und $\Delta \tau$ so gewählt werden, daß die Bedingung $\gamma = 1$ für den höchsten μ -Rasterpunkt μ_{\max} erfüllt ist. Die räumliche Ausbreitung im höchsten μ -Rasterpunkt ist für die Bestimmung der Einsatzzeit des Ereignisses für einen Beobachter an dem Ort z_1 von entscheidender Bedeutung, da die Teilchen hier ihre höchste Ausbreitungsgeschwindigkeit erreichen ($\mu_{\max} \approx 1$). Breiten sich die Teilchen aufgrund des Diskretisierungsfehlers mit $\mu > 1$ aus, so kann dies für energiereiche Teilchen ($v \approx$ Lichtgeschwindigkeit) bedeuten, daß die effektiven Ausbreitungsgeschwindigkeiten $v_{\parallel} = \mu v$ entlang der Magnetfeldlinie Überlichtgeschwindigkeit erreichen. Dies steht offensichtlich im Widerspruch zur Physik.

Da nur für μ_{\max} eine exakte Diskretisierung erreicht wird, soll nun der Diskretisierungsfehler der Gleichung (3.7) erneut betrachtet werden. Die geraden Ableitungen auf der rechten Seite von Gleichung (3.7) werden als *Dissipationsfehler*, die ungeraden als *Dispersionsfehler* bezeichnet (vgl. D. A. ANDERSON ET AL. [1984], S. 84). Diese Bezeichnungen werden verständlich, wenn man das first-order-upwind-Schema mit Hilfe der Fourier-Stabilitätstechnik (nach von Neumann) untersucht (vgl. J. D. ANDERSON ET AL. [1992], S. 95ff.). Da es sich bei der Advektionsgleichung um ein lineares Problem mit konstanten Koeffizienten handelt, kann die Anfangsbedingung als Fourierreihe geschrieben werden, deren einzelne Terme sich mit einer separaten Zeitabhängigkeit entwickeln. Diese zeitliche Entwicklung führt schließlich zu dem sogenannten Verstärkungsfaktor G , der im allgemeinen eine komplexe Funktion ist, die sowohl von γ als auch von $\beta \stackrel{\text{def}}{=} k_m \cdot \Delta s$ (k_m : Wellenzahl) abhängt. Für das first-order-upwind-Schema ergibt sich der Verstärkungsfaktor

$$G = (1 - \gamma + \gamma \cos(\beta)) - i(\gamma \sin(\beta)) \quad (3.9)$$

Der Betrag des Verstärkungsfaktors

$$|G| = \sqrt{(1 - \gamma + \gamma \cos(\beta))^2 + (-\gamma \sin(\beta))^2} \quad (3.10)$$

gibt die Verstärkung der Harmonischen pro Zeitschritt an. Ein exaktes Schema der Advektionsgleichung würde jede Harmonische mit dem Faktor 1 "verstärken", d. h. die Amplitude nicht verändern. Wie leicht zu erkennen ist, gilt dies nur für $\gamma = 1$. Für $\gamma < 1$ werden die Harmonischen gedämpft und zwar um so stärker, je kleiner γ und je größer β (je kleiner die Wellenlänge) ist. Der Phasenwinkel des Verstärkungsfaktors

$$\phi = \arctan \left(\frac{\Im(G)}{\Re(G)} \right) = \arctan \left(\frac{-\gamma \sin(\beta)}{1 - \gamma + \gamma \cos(\beta)} \right) \quad (3.11)$$

gibt die zeitliche Entwicklung der Phase der Harmonischen pro Zeitschritt an.

Der relative Phasenfehler ergibt sich aus dem Verhältnis zwischen dem Phasenwinkel des first-order-upwind-Verfahrens ϕ und dem Phasenwinkel ϕ_e , der durch die Advektionsgleichung bedingt ist:

$$\frac{\phi}{\phi_e} = \frac{\arctan[(-\gamma \sin(\beta))/(1 - \gamma + \gamma \cos(\beta))]}{-\beta \gamma} \quad (3.12)$$

Auch hier ist zu erkennen, daß für $\gamma = 1$ die Phasenwinkel ϕ und ϕ_e identisch sind, d. h. der relative Phasenfehler gleich eins ist. Für $0.5 < \gamma < 1$ ergibt sich hingegen ein vorauseilender Phasenfehler. Die Harmonischen breiten sich somit schneller aus, als die Ausbreitungsgeschwindigkeit μ_i vorgibt. Ist hingegen $\gamma < 0.5$, so ergibt sich ein nacheilender Phasenfehler, der zu einer geringeren Ausbreitungsgeschwindigkeit führt.

WARMING AND HYETT [1974] haben nun gezeigt, daß die Dissipationsfehler der modifizierten Gleichung direkt den Betrag des Verstärkungsfaktors beeinflussen, während der Dispersionsfehler für den relativen Phasenfehler verantwortlich ist. Da das first-order-upwind-Verfahren sowohl einen ausgeprägten Dissipations- als auch einen Dispersionsfehler hat, leidet es unter dem Problem, daß starke Gradienten im Laufe der zeitlichen Entwicklung “ausgeschmiert” werden, was auch häufig als *numerische Diffusion* bezeichnet wird ([D. A. ANDERSON ET AL., 1984], S. 92). Andere Autoren (z. B. ROACH [1982], S. 65, WONG [1982], S. 22) verstehen unter der numerischen Diffusion nur den ersten Term auf der rechten Seite der modifizierten Gleichung (3.7):

$$\frac{\mu_i \Delta s}{2} (1 - \gamma) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} \quad (3.13)$$

Wie bereits festgestellt wurde, gibt es kein lineares Verfahren, das sowohl monotonieerhaltend als auch von zweiter oder höherer Konvergenzordnung ist. Speziell bei Verfahren zweiter Ordnung tritt häufig das Problem auf, daß der führende Fehlerterm auf der rechten Seite der modifizierten Gleichung eine ungerade Ableitung beinhaltet, wodurch das Verfahren im wesentlichen unter einem Dispersionsfehler leidet. Bei starken Gradienten der Lösung kommt es dann zu einem unerwünschten “Über- und Unterschwingen”, das die Monotonieerhaltung des Verfahrens verletzt (eine ausführliche Diskussion findet man in LEVEQUE [1992], S. 173ff.).

BORIS AND BOOK [1973] haben mit dem nichtlinearen expliziten Differenzenverfahren SHASTA den sogenannten *flux-corrected transport* (FCT) eingeführt, um eine höhere Konvergenzordnung (> 1) mit der Monotonieerhaltung zu vereinbaren. Die Anwendung des FCT auf diverse Verfahren, wie z. B. auch das first-order-upwind-Verfahren (Donor Cell) erfolgte in einer weiteren Veröffentlichung von BOOK, BORIS AND HAIN [1975]. ZALESK [1979] hat schließlich den FCT in einer verallgemeinerten Form geschrieben, um eine Erweiterung des Verfahrens auf den zweidimensionalen Fall zu erreichen. Die Grundzüge des FCT für den eindimensionalen Fall seien hier nach ZALESK [1979] kurz aufgeführt:

Faßt man die Diskretisierung der Advektionsgleichung als eine Unterteilung in kleine Volumina auf, so wird auch von dem *control volume approach* gesprochen (vgl. ROACH [1982], S. 25ff.):

$$\frac{\zeta_j^{n+1} - \zeta_j^n}{\Delta \tau} + \frac{F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n}{\Delta s} = 0 \quad (3.14)$$

1. Der Fluß $F_{j+1/2}^L$ für ein Schema mit niedriger Ordnung, das monotonieerhaltend ist, wird berechnet.
2. Der Fluß $F_{j+1/2}^H$ für ein Schema höherer Ordnung wird berechnet.
3. Der “antidiffusive Fluß” wird definiert:

$$A_{j+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} F_{j+1/2}^H - F_{j+1/2}^L \quad (3.15)$$

4. Die Lösung der Advektionsgleichung wird mit dem Schema niedriger Ordnung um einen Zeitschritt vorangeführt (“transported and diffused”):

$$\zeta_j^{\text{td}} = \zeta_j^n - \frac{\Delta \tau}{\Delta s} \left(F_{j+1/2}^L - F_{j-1/2}^L \right) \quad (3.16)$$

5. Der “antidiffusive Fluß” $A_{j+1/2}$ wird so eingeschränkt, daß die ζ_i^{n+1} nach Schritt 6 keine Extrema aufweisen, die nicht in ζ_i^{td} oder ζ^n vorhanden sind:

$$A_{j+1/2}^C = C_{j+1/2} A_{j+1/2} \quad 0 \leq C_{j+1/2} \leq 1 \quad (3.17)$$

Bei den $C_{j+1/2}$ handelt es sich um nichtlineare Funktionen, die sogenannten Fluxlimiter.

6. Der beschränkte “antidiffusive Fluß” wird in einem weiteren Schritt auf die ζ_j^{td} angewendet:

$$\zeta_j^{n+1} = \zeta_j^{\text{td}} - \frac{\Delta\tau}{\Delta s} \left(A_{j+1/2}^C - A_{j-1/2}^C \right) \quad (3.18)$$

Wie zu erkennen ist, ist der FCT konservativ, da der Fluß, der aus einer “Zelle” strömt, in die “Nachbarzelle” eintritt.

Für das first-order-upwind-Schema als das Schema niedriger Ordnung ergeben sich somit konkret folgende Schritte:

1. Der Fluß $F_{j+1/2}^L$ über die “Zellgrenze” wird berechnet.²

$$F_{j+1/2}^L = a_{j+1/2} \zeta_j^n \quad (3.19)$$

2. Als Schema höherer Ordnung bietet sich das *Lax-Wendroff-Schema* an, da es eines der einfachsten Schemata zweiter Ordnung ist (siehe D. A. ANDERSON ET AL. [1984], S. 101f.; SMITH [1985], S. 181f.).

$$\begin{aligned} \zeta_j^{n+1} &= \zeta_j^n - \frac{\gamma}{2} (\zeta_{j+1}^n - \zeta_{j-1}^n) + \frac{\gamma^2}{2} (\zeta_{j+1}^n - 2\zeta_j^n + \zeta_{j-1}^n) \\ &= \zeta_j^n - \gamma (\zeta_j^n - \zeta_{j-1}^n) - \eta (\zeta_{j+1}^n - 2\zeta_j^n + \zeta_{j-1}^n) \\ \text{bzw. } \zeta_j^{n+1} &= \zeta_j^n - \gamma (\zeta_j^n - \zeta_{j+1}^n) - \eta (\zeta_{j+1}^n - 2\zeta_j^n + \zeta_{j-1}^n) \quad \text{für } a < 0 \end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung auf einen räumlichen Verlauf $a(s)$ führt zu

$$\begin{aligned} \zeta_j^{n+1} &= \zeta_j^n - (\gamma_{j+1/2} \zeta_j^n - \gamma_{j-1/2} \zeta_{j-1}^n) \\ &\quad - \eta_{j+1/2} (\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n) + \eta_{j-1/2} (\zeta_j^n - \zeta_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (3.20)$$

mit $\gamma_{j+1/2} = |a_{j+1/2}| \frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ und $\eta_{j+1/2} = \frac{1}{2} \gamma_{j+1/2} (1 - \gamma_{j+1/2})$

$$F_{j+1/2}^H = a_{j+1/2} \zeta_j^n + \frac{1}{2} a_{j+1/2} (1 - \gamma_{j+1/2}) (\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n) \quad (3.21)$$

- 3.

$$A_{j+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} F_{j+1/2}^H - F_{j+1/2}^L = \frac{1}{2} a_{j+1/2} (1 - \gamma_{j+1/2}) (\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n) \quad (3.22)$$

- 4.

$$\zeta_j^{\text{td}} = \zeta_j^n - \frac{\Delta\tau}{\Delta s} (a_{j+1/2} \zeta_j^n - a_{j+1/2} \zeta_{j-1}^n) = \zeta_j^n - \gamma_{j+1/2} (\zeta_j^n - \zeta_{j-1}^n) \quad (3.23)$$

²Für das first-order-upwind-Schema gilt: $a_{i+1/2} = a$ da $a(s) = \text{const}$. Die Berücksichtigung eines räumlichen Verlaufs $a(s) \neq \text{const}$ stellt eine Verallgemeinerung dar, auf die später zurückgegriffen wird.

5. Es sei

$$\Theta_{lj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\zeta_j^n - \zeta_{j-1}^n}{\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n} \quad \text{das Verhältnis der Gradienten (linksseitig)}$$

$$\Theta_{rj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\zeta_{j+2}^n - \zeta_{j+1}^n}{\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n} \quad \text{das Verhältnis der Gradienten (rechtsseitig)}$$

Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

(a) $(\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n) > 0$

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \Theta_{lj} > \eta_{j+1/2} &\Rightarrow C_{j+1/2} = 1 \\ \text{ii.} \quad 0 \leq \Theta_{lj} \leq \eta_{j+1/2} &\Rightarrow C_{j+1/2} = \frac{\Theta_{lj}}{\eta_{j+1/2}} \\ \text{iii.} \quad \Theta_{lj} < 0 &\Rightarrow C_{j+1/2} = 0 \end{aligned}$$

(b) $(\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n) = 0$

$$C_{j+1/2} = 0$$

(c) $(\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n) < 0$

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \Theta_{rj} > \eta_{j+1/2} &\Rightarrow C_{j+1/2} = 1 \\ \text{ii.} \quad 0 \leq \Theta_{rj} \leq \eta_{j+1/2} &\Rightarrow C_{j+1/2} = \frac{\Theta_{rj}}{\eta_{j+1/2}} \\ \text{iii.} \quad \Theta_{rj} < 0 &\Rightarrow C_{j+1/2} = 0 \end{aligned}$$

Eine detaillierte Diskussion der Fluxlimiter $C_{j+1/2}$ findet sich bei ZALESK [1979]. Dort werden auch weitere kompliziertere Fluxlimiter erörtert.

6.

$$\zeta_j^{n+1} = \zeta_j^{\text{td}} - \eta_{i+1/2} (\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n) C_{j+1/2} + \eta_{i-1/2} (\zeta_j^n - \zeta_{j-1}^n) C_{j-1/2} \quad (3.24)$$

Das so erhaltene Schema kombiniert die gewünschten Eigenschaften des first-order-upwind-Verfahrens mit denen des Lax-Wendroff-Verfahrens. Das first-order-upwind-Verfahren ist auch in der Nähe von starken Gradienten der Lösung monotonieerhaltend, was durch die inhärente numerische Diffusion bedingt ist, während das Lax-Wendroff-Verfahren bei glattem Verlauf der Lösung eine Konvergenzordnung von zwei ermöglicht. Man kann daher sagen, daß der FCT in Abhängigkeit vom Lösungsverlauf das richtige Maß an numerischer Diffusion zuläßt.

Der einfache Testfall einer "Rechteckwelle" läßt sich sowohl bei BOOK, BORIS AND HAIN [1975] als auch bei SCHLÜTER [1985], S. 44f. nachvollziehen. Eigene Berechnungen haben gezeigt, daß sich mit dem FCT ähnlich gute Ergebnisse für den Fall einer sich ausbreitenden "Stufenwelle" ergeben. Die Approximationsgenauigkeit des FCT ist dabei entscheidend von der Größe γ abhängig. Betrachtet man z. B. die Ausbreitung einer Anfangsfunktion, die über einen großen räumlichen Bereich monoton wächst, wie z. B. einen Ausschnitt aus einer Exponentialfunktion, und wählt man zusätzlich eine nicht sehr feine Auflösung des räumlichen Rasters, so ist das Ergebnis für $\gamma = 0.5$ zufriedenstellend, wie in der Abbildung 3.2 (oben)

zu erkennen ist. Die Approximationsgenauigkeit des FCT (Sterne) ist deutlich besser als die des first-order-upwind-Verfahrens (Kreuze). Führt man die gleiche Berechnung mit einem $\gamma = 0.1$ durch (siehe unteren Teil der Abbildung 3.2), so kommt es bei dem FCT zur Ausbildung unerwünschter "Terrassen". Für die Fluxlimiter gilt dann im wesentlichen $C_{j+1/2} = 1$, so daß der "antidiffusive Fluß" durch das Lax-Wendroff-Schema bestimmt ist. Der mit dem Lax-Wendroff-Schema verbundene Dispersionsfehler führt aber zu den in Abbildung 3.2 erkennbaren "Terrassen", so daß die numerische Lösung nur noch im Mittel der analytischen Lösung folgt.

Es wäre daher wünschenswert, ein Verfahren zu haben, das einerseits die oben genannten positiven Eigenschaften des FCT besitzt und andererseits in so extremen Fällen wie z. B. dem der "Exponentialwelle" bessere Ergebnisse als das first-order-upwind-Verfahren liefert. Eine relativ große Auswahl von *Fluxlimitermethoden* ist von SWEBY [1984] untersucht worden. Die folgenden Ausführungen folgen im wesentlichen seiner Arbeit.

Das Hauptinteresse SWEBYs [1984] bei seiner Untersuchung ausgewählter Schemata richtet sich darauf, ob diese im Verlauf der Berechnung Oszillationen, wie z. B. das Lax-Wendroff-Schema, entwickeln. Um die Oszillation besser zu beschreiben, wird der Begriff der *Total Variation* (engl.: total = absolut) $TV(\zeta^{n+1})$ der numerischen Lösung definiert

$$TV(\zeta^{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \left| \zeta_{j+1}^{n+1} - \zeta_j^{n+1} \right| \quad (3.25)$$

Von Interesse sind nun die Verfahren, deren TV im Laufe der Berechnung entweder konstant bleibt oder kleiner wird. Diese Eigenschaft

$$TV(\zeta^{n+1}) \leq TV(\zeta^n) \quad (3.26)$$

wird als *Total Variation Diminishing* (TVD) (engl.: diminishing = abschwächend) bezeichnet. TVD-Verfahren sind prinzipiell monotonieerhaltend. Die von SWEBY [1984] untersuchten Verfahren lassen sich leider nicht direkt mit dem FCT von BORIS AND BOOK [1973] vergleichen. Zwei grundlegende Unterschiede verhindern dies: Zum einen ist der FCT Algorithmus ein Zweischrittverfahren (Schritt 4. und 6.), während hier Einschrittverfahren betrachtet werden; und zum anderen ist der Fluxlimiter des FCT auf maximal eins begrenzt, während durch die TVD ein größerer Bereich (maximal zwei) zur Verfügung steht:

Zunächst wird der Fluß für das Lax-Wendroff-Schema berechnet

$$F_{j+1/2} = a_{j+1/2} \zeta_j^n + \frac{1}{2} a_{j+1/2} (1 - \gamma_{j+1/2}) (\zeta_{j+1}^n - \zeta_j^n) \phi_j \quad \text{für } a_{j+1/2} > 0 \quad (3.27)$$

wobei der zweite Term mit einem Fluxlimiter ϕ_j versehen wird. Dieser Fluxlimiter ist eine Funktion

$$\phi_j = \phi(\Theta_j) \quad \text{mit} \quad \Theta_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\zeta_j - \zeta_{j-1}}{\zeta_{j+1} - \zeta_j} \quad (3.28)$$

von dem Verhältnis benachbarter Gradienten, das ein Maß für die Glattheit der Daten hergibt. Zusätzliche Anforderungen werden nun an die Funktion $\phi(\Theta_j)$ gestellt, damit das Verfahren konsistent ist, sich in Regionen glatter Lösung wie von zweiter Ordnung verhält und zusätzlich die TVD-Bedingung erfüllt. Im Gegensatz zu den Fluxlimitern $C_{j+1/2}$ des FCT ist die Funktion $\phi(\Theta_j)$ nicht von η und damit auch nicht indirekt von γ abhängig, so daß sich auch für $\gamma \ll 1$ gute Resultate erzielen lassen.

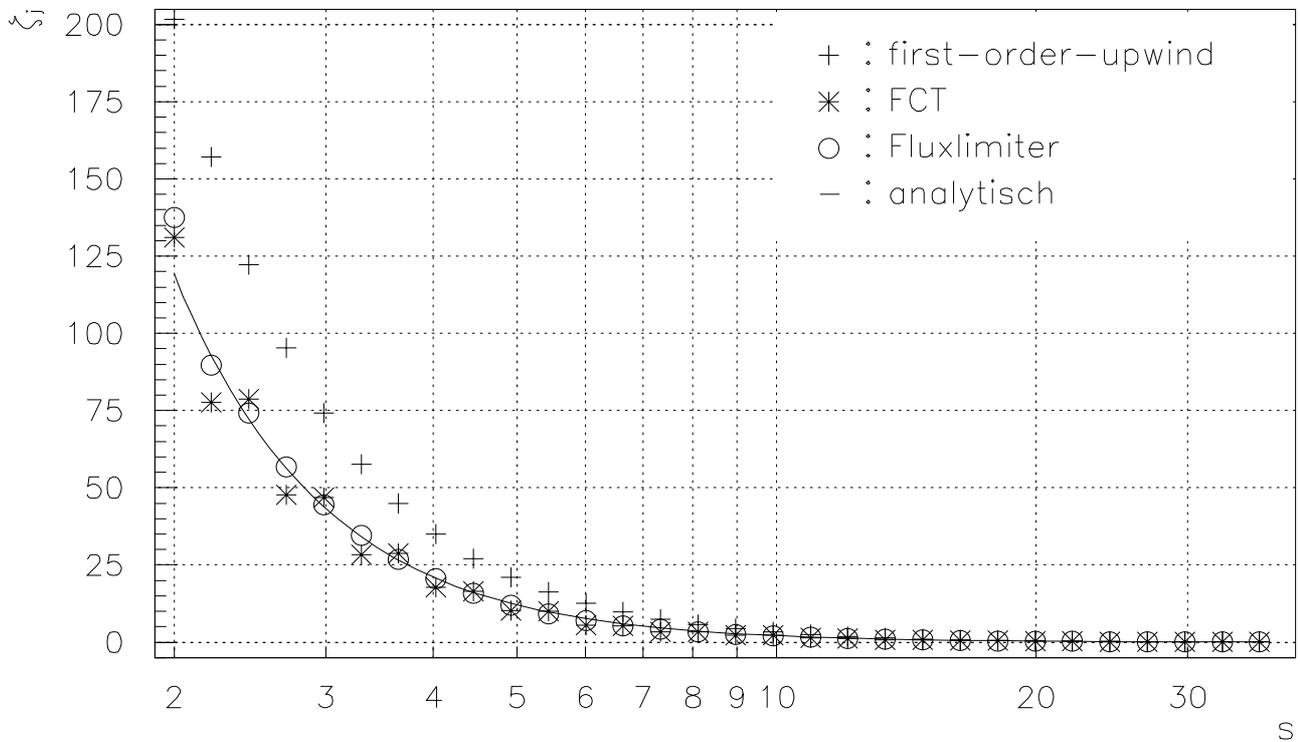
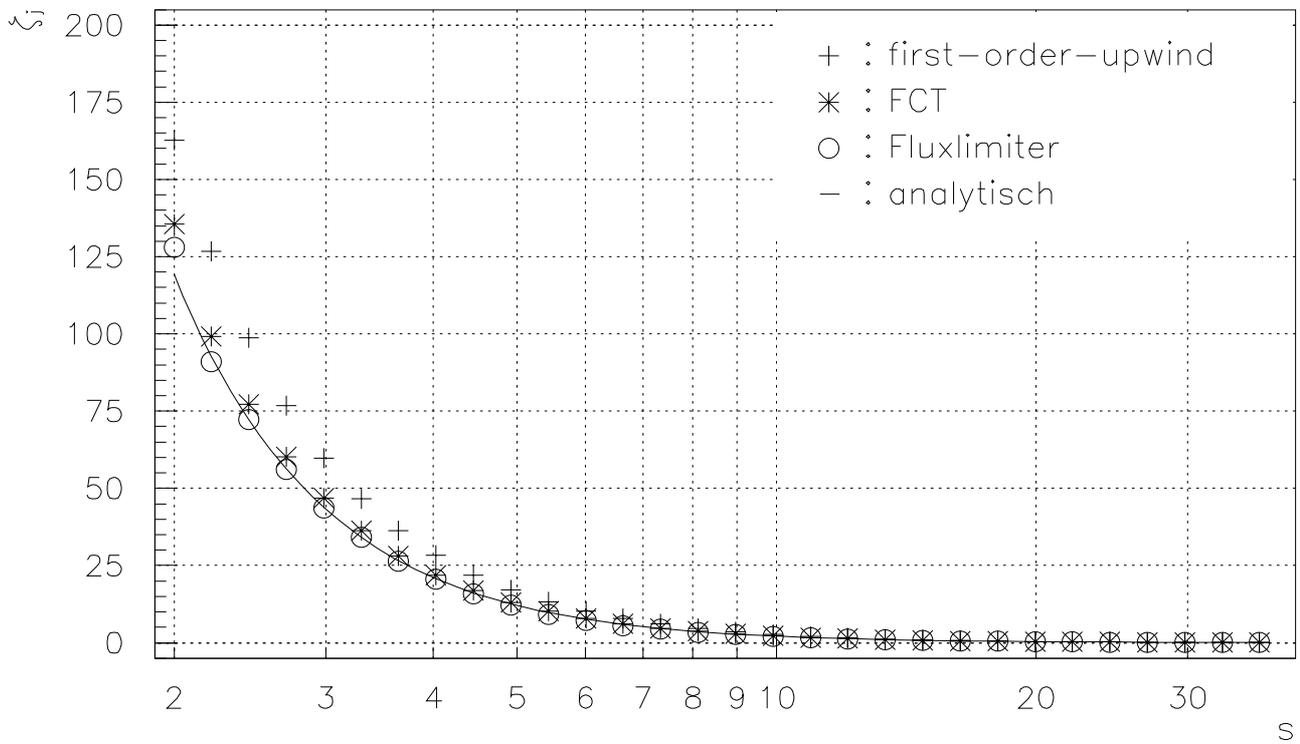


Abbildung 3.2: Die numerisch berechneten Lösungen für den Testfall einer “Exponentialwelle” sind für drei verschiedene Verfahren dargestellt, wobei zusätzlich die analytische Lösung als durchgezogene Kurve eingezeichnet ist. In der oberen Abbildung wurde $\gamma = 0.5$ (40 Zeitschritte) und in der unteren $\gamma = 0.1$ (200 Zeitschritte) gewählt.

Eine Reihe von verschiedenen Fluxlimitern mit den eben beschriebenen Eigenschaften werden von SWEBY [1984] abgeleitet und für verschiedene Anfangsbedingungen (Rechteckwelle und \sin^2 -Welle) im zeitlichen Verlauf ihrer numerischen Lösungen miteinander verglichen.

Der im weiteren verwendete Fluxlimiter ist der *monotonized-centered-limiter* von VAN LEER [1977]

$$\phi(\Theta) = \max \left[0, \min \left(2\Theta, \frac{1+\Theta}{2}, 2 \right) \right] \quad (3.29)$$

der sich nicht unter den von SWEBY [1984] untersuchten Fluxlimitern befindet. Man kann sich jedoch davon überzeugen, daß er den geforderten Eigenschaften genügt.

Ist das Verhältnis benachbarter Gradienten Θ_j nicht zu bilden, da entweder der Nenner identisch verschwindet oder die Stützstellen ζ_j am Rand des Gitters nicht definiert sind, so ist der Fluxlimiter ϕ_j gleich null zu setzen. Der Fluß $F_{j+1/2}$ reduziert sich dann auf den Fluß des upwind-Verfahrens, womit sich natürlich auch die Konvergenzordnung reduziert.

Nachdem nun der Fluß berechnet worden ist, kann die Lösung um einen Zeitschritt vorangeführt werden

$$\zeta_j^{n+1} = \zeta_j^n - \frac{\Delta\tau}{\Delta s} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) \quad (3.30)$$

Das hier beschriebene Schema kann leicht an den Fall $a < 0$ angepaßt werden, bei dem sich im wesentlichen nur die upwind-Richtung ändert. Ein verallgemeinertes Schema, das sich selbständig auf das Vorzeichen von a einstellt, wird bei ROE [1986] beschrieben.

Testet man nun das Fluxlimiter-Verfahren mit der "Exponentialwelle", so ergibt sich eine bessere Approximation als mit dem FCT, wie man in der unteren Abbildung 3.2 erkennen kann. Das Fluxlimiter-Verfahren ist demnach bei einem $\gamma \ll 1$ dem FCT vorzuziehen, worauf in den Abschnitten 4.5.1 und 4.5.2.1 Bezug genommen wird.

Berechnungen der Lösungen der Transportgleichung mit dem FCT und dem Fluxlimiter-Verfahren zur Approximation des s -Transportes haben kaum Unterschiede ergeben. Dadurch, daß der FCT von seiner Struktur her einfacher in einen Algorithmus umzusetzen ist als das Fluxlimiter-Verfahren, ergibt sich ein Laufzeitvorteil des FCT. Aus diesem Grunde wird der FCT-Algorithmus weiterhin für den s -Transport der Transportgleichung verwendet, wie schon WONG [1982] dies vorgeschlagen hat.

3.2.1.2 Die innere und äußere Grenze

Nachdem das Verfahren für den s -Transport diskutiert worden ist, gilt es nun, die äußere Randbedingung den physikalischen Gegebenheiten anzupassen. NG AND WONG [1979] wählen für die innere Grenze einen radialen Abstand von 0.1 AU, während RUFFOLO [1991] einen Abstand von 0.01 AU bevorzugt. Für das hier verwendete Verfahren wird eine reflektierende innere Grenze bei $r = 0.05$ AU festgelegt. Dies entspricht ungefähr einem Abstand von zehn Sonnenradien, bei dem alle Feldlinien zum interplanetaren Raum hin offen sind und der Sonnenwind radial abströmt, ohne von der Sonnenrotation noch mitgeführt zu werden.

Die Wahl einer reflektierenden bzw. offenen inneren Grenze hat kaum Einfluß auf die numerische Lösung, da die Fokussierung bei $r = 0.05$ AU bereits so dominiert, daß die meisten Teilchen mit $\mu < 0$ vorher ihre Ausbreitungsrichtung umkehren.

Die Wahl der äußeren Grenze wird entscheidend durch die Ausbreitungsdauer der solaren Teilchen festgelegt. Soll das mathematische Problem eine äußere Grenze im Unendlichen haben, so kann dies durch eine sich mit der Ausbreitung der Teilchen nach außen verschiebenden

Grenze erreicht werden. Wird die Ausbreitung der Teilchen jedoch über einen langen Zeitraum verfolgt (Größenordnung Tage) und haben die Teilchen große Ausbreitungsgeschwindigkeiten, so kann dies zu einem allzu großen Gebiet führen, auf dem die Transportgleichung gelöst werden muß. Ein Ausweg besteht darin, die äußere Grenze so weit vom Beobachtungsort entfernt zu positionieren, daß sie praktisch keinen Einfluß mehr auf die numerische Lösung am Beobachtungsort hat. Speziell für stationäre Lösungen zeigt sich, daß es wichtig ist, daß der Abstand zum Beobachter hinreichend groß ist.

Im oberen Teil der Abbildung 3.3 ist die omnidirektionale Intensität g_{0s} der stationären Lösung über dem radialen Abstand für typische Ausbreitungsparameter³ aufgetragen. Mit zunehmender omnidirektionaler Intensität sind die Kurven für unterschiedliche Abstände 6 AU, 12 AU, 24 AU und 48 AU der äußeren Grenze entlang der Feldlinie eingezeichnet. Die äußere Grenze wird als offen angenommen.

Zum einen ist zu erkennen, daß die omnidirektionale Intensität mit zunehmendem Abstand der äußeren Grenze zunimmt, da sich der Einfluß der offenen Grenze verringert. Die Teilchen können an der offenen Grenze ungehindert entweichen, so daß eine Rückstreuung in Richtung zur Sonne nicht stattfinden kann. Dadurch nimmt die omnidirektionale Intensität in der inneren Heliosphäre ab. Zum anderen ist deutlich zu erkennen, daß der Einfluß der äußeren Grenze für kleine radiale Abstände geringer ist als für große. Grund hierfür ist die mit abnehmendem radialen Abstand zunehmende Fokussierung, die die PWV schließlich so stark dominiert, daß der relative Einfluß der äußeren Grenze vernachlässigt werden kann.

Im unteren Teil der Abbildung 3.3 ist die Anisotropie erster Ordnung ξ_{1s} der stationären Lösung über dem radialen Abstand aufgetragen. Da die Anisotropie als Quotient der Legendre-Koeffizienten g_{1s} und g_{0s} definiert ist, macht sich hier die zunehmende omnidirektionale Intensität mit größerer Entfernung der äußeren Grenze in einer Abnahme der Anisotropie bemerkbar. Auf g_{1s} hat die Lage der äußeren Grenze keinen Einfluß, da g_{1s} nach der Gleichung (2.64) proportional zur Stromdichte ist, die wiederum nach der Kontinuitätsgleichung (2.61) für stationäre Verhältnisse räumlich konstant ist. Ähnlich verhält es sich mit den Legendre-Koeffizienten höherer Ordnung, die von der hier vorgenommenen Verschiebung der äußeren Grenze nur äußerst geringfügig beeinflusst werden (siehe Abschnitt 5.2).

Die Annahme einer offenen äußeren Grenze ist eine sehr unphysikalische Annahme, da dies einem plötzlichen Verschwinden der Streuung ($\lambda_{||} = \infty$) entspricht. Wählt man hingegen teilweise reflektierende Grenzen, so kann die Auswirkung der äußeren Grenze gemindert, aber nicht beseitigt werden, da die Art der Reflektion an die Ausbreitungsbedingungen nicht allgemein angepaßt werden kann.

Für die weiteren Berechnungen der numerischen Lösung hat es sich gezeigt, daß die Wahl der äußeren Grenze bei $s_b = 24$ AU einen guten Kompromiß zwischen Rechenaufwand und Realisierung einer unendlich weit entfernten äußeren Grenze darstellt.

³Unter typischen Ausbreitungsparametern ist eine radial konstante Streuung, eine durch die Archimedische Spirale des Magnetfeldes bestimmte Fokussierungslänge, ein Pitchwinkelstreukoeffizient mit $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$, $\hat{\sigma} = 0$ und eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.3$ AU zu verstehen.

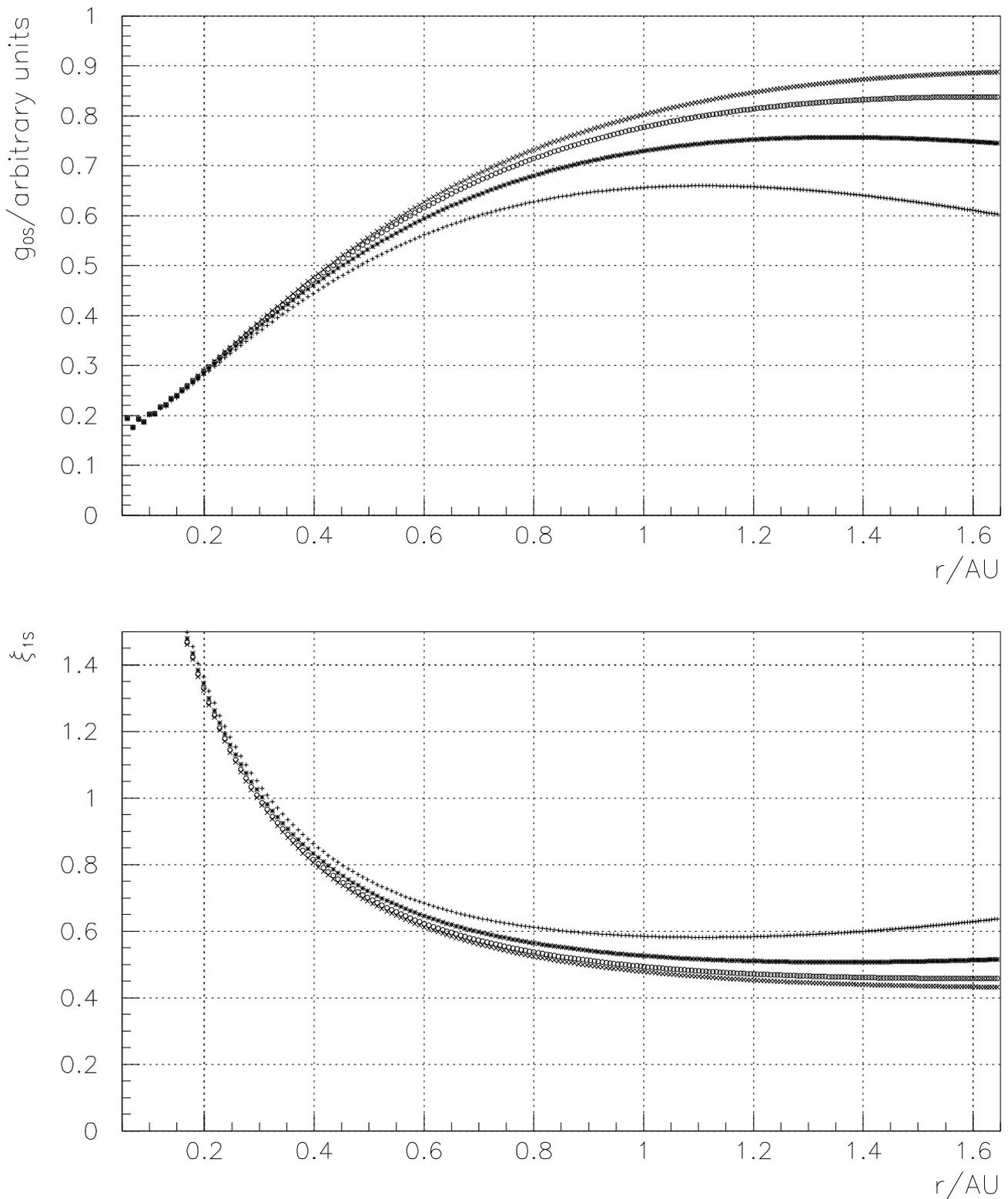


Abbildung 3.3: Die omnidirektionale Intensität g_{0s} (oben) und die Anisotropie ξ_{1s} der stationären Lösung sind in ihrem radialen Verlauf für unterschiedlich weit entfernte äußere Grenzen dargestellt. Den Kurven sind mit zunehmender omnidirektionaler Intensität bzw. abnehmender Anisotropie folgende äußere Grenzen entlang der Magnetfeldlinie s zugeordnet: 6 AU, 12 AU, 24 AU und 48 AU.

3.2.2 Der μ -Transport

Die lineare Konvektions-Diffusions-Gleichung (von parabolischem Typ)

$$\underbrace{\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mu} (b(\mu)\zeta)}_{II} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mu} \left(D(\mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right)}_{III} = 0 \quad (3.31)$$

mit

$$b(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \mu^2}{2L(s)} \quad (3.32)$$

$$D(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda_{\parallel}(s)} \bar{\kappa}(\mu) \quad \text{mit } D(\mu) > 0 \quad (3.33)$$

ist eine PDGL, deren Diskretisierung schon mit einer gewissen Schwierigkeit verbunden ist. Aus diesem Grund soll hier die Diskretisierung schrittweise vorgenommen werden, um so die Aufgabe in überschaubare Abschnitte zu untergliedern.

- I. Die Diskretisierung in der Zeit τ erfolgt wie schon beim s -Transport durch eine einseitige Vorwärtsdifferenz⁴

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau^n} \simeq \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau) \quad (3.34)$$

Dabei steht man wieder vor der Wahl, ob man die Werte ζ^{n+1} explizit oder implizit berechnen soll. Die Argumente für ein implizites Verfahren überwiegen, da

1. das Stabilitätskriterium für ein explizites Verfahren bei der Approximation eines diffusiven Terms (siehe ROACH [1982], S. 39)

$$\Delta \tau \leq \frac{1}{2} \frac{(\Delta \mu)^2}{D} \quad (3.35)$$

sehr restriktiv sein kann. So führt z. B. eine Halbierung der μ -Schrittweite zu einem achtfachen Rechenaufwand.

2. der physikalische Vorgang der Diffusion gut durch die implizite Rechenweise — die zwangsläufig auf die Invertierung einer Matrix führt — wiedergegeben wird, da so ([ROACH, 1982], S. 85f.) die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Information entlang der räumlichen Koordinate gewährleistet ist.

Das implizite Verfahren führt auf ein lineares Gleichungssystem

$$\vec{\zeta}^n = B \vec{\zeta}^{n+1} \quad (3.36)$$

dessen Koeffizientenmatrix für den μ -Transport Tridiagonalgestalt annimmt. Zur Bestimmung des Vektors $\vec{\zeta}^{n+1}$ gibt es einen sehr effektiven⁵ Algorithmus, der in der Literatur unter verschiedenen Bezeichnungen geführt wird: *Verkürzte Gaußelimination*,

⁴Diese Art der Diskretisierung wird auch als Euler-Rückwärts bezeichnet, da bei impliziter Diskretisierung der μ -Differenzen die τ -Differenz relativ gesehen rückwärts erfolgt.

⁵Sei I die Anzahl der Gleichungen des Gleichungssystems, so ist der Rechenaufwand $\propto O(I)$, d. h. linear (vgl. PRESS ET AL. [1989], S. 42).

Faktorisierungsmethode, schnelle Gaußelimination, double loop method, passage method, Thomas-Algorithmus, u. a. Die Grundidee des Algorithmus besteht in der Zerlegung der Tridiagonalmatrix in das Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix (LU- bzw. LR-Zerlegung). Nach dieser Zerlegung kann das Gleichungssystem in zwei Durchläufen gelöst werden.

Eine hinreichende Bedingung für die numerische Stabilität der verkürzten Gaußelimination ist die schwache Diagonaldominanz (siehe Anhang C) der Zeilen der Koeffizientenmatrix B (siehe SAMARSKIJ [1984], S. 37f.). Die Bedingung gewährleistet einerseits eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems (3.36), da es sich um ein hinreichendes Kriterium für nichtsinguläre M-Matrizen handelt, die per definitionem eine Inverse besitzen und von denen bekannt ist, daß eine LU-Zerlegung existiert (siehe WINDISCH [1989], S. 39).

Andererseits wird durch die Bedingung sichergestellt, daß maschinenbedingte Rundungsfehler sich nicht zu einem unakzeptablen Fehler des Lösungsvektors ζ^{n+1} aufakkumulieren.

Die schwache Diagonaldominanz führt für den μ -Transport zu folgendem Stabilitätskriterium:

$$L \geq \Delta\tau \left(1 + \frac{\Delta\mu}{2}\right) \quad (3.37)$$

Für $\Delta\tau = v \Delta t = 0.01$ AU und $\Delta\mu = 0.05$ ergibt sich für die Fokussierungslänge L die Ungleichung $L \geq 0.01025$, die bei einem Magnetfeld, das die Form einer Archimedischen Spirale hat, für einen radialen Abstand $r \geq 0.05$ AU erfüllt ist.

Sowohl J. D. ANDERSON ET AL. [1992], S. 172 als auch PRESS [1989], S. 43 weisen darauf hin, daß sich die verkürzte Gaußelimination in der Praxis auch dann als stabil erwiesen hat, wenn die oben genannte hinreichende Bedingung nicht erfüllt war. Eigene numerische Berechnungen haben bestätigt, daß es sich bei dem Stabilitätskriterium (3.37) um keine notwendige Bedingung für die Stabilität des μ -Transportes handelt. Dies mag verständlich sein, da zumindest die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems (3.36) durch die M-Matrizeigenschaften der Koeffizientenmatrix B (siehe Anhang C) gewährleistet ist.

II. Zur Diskretisierung des linearen Differentialoperators

$$\frac{\partial}{\partial\mu} (b(\mu)\zeta) \quad (3.38)$$

kann je nach dem Vorzeichen von $b(\mu)$ entweder die *Rückwärtsdifferenz*

$$\frac{\partial}{\partial\mu} (b(\mu)\zeta) \Big|_{\mu=\mu_i} \simeq \frac{b_{i+1/2}\zeta_i - b_{i-1/2}\zeta_{i-1}}{\Delta\mu} + O(\Delta\mu) \quad \text{für } b(\mu) > 0 \quad (3.39)$$

oder die *Vorwärtsdifferenz*

$$\frac{\partial}{\partial\mu} (b(\mu)\zeta) \Big|_{\mu=\mu_i} \simeq \frac{b_{i+1/2}\zeta_{i+1} - b_{i-1/2}\zeta_i}{\Delta\mu} + O(\Delta\mu) \quad \text{für } b(\mu) < 0 \quad (3.40)$$

verwendet werden. Diese Diskretisierung ist die gleiche, wie sie beim first-order-upwind-Schema verwendet wurde (siehe Abschnitt 3.2.1.1), mit dem Unterschied, daß das first-order-upwind-Schema auf den allgemeinen Fall eines variablen Koeffizienten $b(\mu)$ erweitert wird. Diese Verallgemeinerung wird auch als *donor-cell-Schema* bezeichnet. Die Wahl des Funktionswertes von $b(\mu)$ an den Grenzen $i - 1/2$ und $i + 1/2$ des jeweiligen Elementarvolumens ζ_i ermöglicht eine genauere Approximation (vgl. ROACH [1982], S. 73)⁶. Neben der Approximation durch einseitige Differenzen gibt es noch die Möglichkeit der Approximation durch die *symmetrische* bzw. *zentrale Differenz*⁷

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (b(\mu)\zeta) \Big|_{\mu=\mu_i} \simeq \frac{\frac{b_{i+1/2}}{2} (\zeta_{i+1} + \zeta_i) - \frac{b_{i-1/2}}{2} (\zeta_i + \zeta_{i-1})}{\Delta \mu} + O((\Delta \mu)^2) \quad (3.44)$$

wie sie auch bei WONG [1982], S. 17 verwendet wird. Da die Werte für $\zeta_{i+1/2}$ und $\zeta_{i-1/2}$ auf den Zellgrenzen nicht bekannt sind, werden hierfür die arithmetischen Mittel der entsprechenden Zellmitten verwendet. Betrachtet man die Flüsse über die Zellgrenzen, wie in Abschnitt 3.2.1.1 bereits vorgestellt, so ergibt sich für die zentrale Differenz:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (b(\mu)\zeta) \Big|_{\mu=\mu_i} = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta \mu} \quad \text{mit} \quad F_{i+1/2} = b_{i+1/2} \frac{\zeta_{i+1} + \zeta_i}{2} \quad (3.45)$$

Der Vorteil der zentralen Differenz liegt in dem Approximationsfehler, der von quadratischer Ordnung in $\Delta \mu$ ist, während die einseitigen Differenzen einen Approximationsfehler von linearer Ordnung in $\Delta \mu$ haben. Außerdem ist die zentrale Differenz unabhängig von dem Vorzeichen von $b(\mu)$ zu verwenden. Der Vorteil der einseitigen Differenzen ist hingegen die bessere Stabilitätseigenschaft, wie bei der Betrachtung der Stabilität des gesamten μ -Transportes noch deutlich werden wird.

III. Bei der Diskretisierung des linearen Differentialoperators

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(D(\mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right) \quad \text{mit} \quad D(\mu) > 0 \quad (3.46)$$

ist wieder darauf zu achten, daß das physikalische Prinzip der Teilchenzahlerhaltung gewahrt wird. Differenzenverfahren, die diese Eigenschaft haben, werden als konservative Differenzenverfahren bezeichnet. Es bietet sich daher folgende Diskretisierung mit

⁶Während ROACH [1982] vorschlägt, die $b_{i+1/2}$ aus dem arithmetischen Mittel der Funktionswerte in den entsprechenden Zellmitten zu bestimmen

$$b_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b(\mu_{i+1}) + b(\mu_i)}{2} \quad (3.41)$$

haben eigene numerische Berechnungen gezeigt, daß für die Diskretisierung des μ -Transportes die Wahl des Funktionswertes an der Grenze der Zelle vorteilhafter ist

$$b_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} b(\mu_{i+1/2}) \quad (3.42)$$

⁷Für den Fall, daß $b_{i+1/2} = b_{i-1/2} = \text{const}$ gilt, erhält man die geläufigere Form

$$b \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_i} \simeq b \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2\Delta \mu} + O((\Delta \mu)^2) \quad (3.43)$$

zentralen Differenzen an

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(D(\mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right) \Big|_{\mu=\mu_i} \simeq \frac{w_{i+1/2} - w_{i-1/2}}{\Delta \mu} + O((\Delta \mu)^2) \quad (3.47)$$

mit

$$w_{i+1/2} = D(\mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_{i+1/2}} \simeq a_{i+1/2} \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\Delta \mu} \quad (3.48)$$

$$w_{i-1/2} = D(\mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_{i-1/2}} \simeq a_{i-1/2} \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{\Delta \mu} \quad (3.49)$$

Die Koeffizienten⁸ $a_{i+1/2}$ lassen sich nun so wählen, daß die Diskretisierung speziell an den analytischen Verlauf von $D(\mu)$ angepaßt ist und das Verfahren auch in der Klasse der stückweise stetigen Koeffizienten konvergiert. Dies ist von besonderem Interesse, da der Koeffizient $\tilde{\kappa}(\mu)$ für $\hat{q} = 1$ und $\hat{\sigma} \neq 0$ eine Unstetigkeitsstelle bei $\mu = 0$ hat. Eine Methode, die dies ermöglicht, ist die *Integro-Interpolationsmethode* von TICHONOV AND SAMARSKIJ [1961]. Dabei wird wieder von der Vorstellung ausgegangen, daß es sich bei der Diskretisierung der PDGI durch das numerische Gitter um eine Unterteilung in Elementarvolumina handelt (control volume approach). Vorgegebene physikalische Erhaltungssätze müssen nun für die Elementarvolumina formuliert werden, um dann daraus entsprechende Differenzenverfahren zu konstruieren. Die in diesen Erhaltungsgleichungen enthaltenen Integrale und Ableitungen werden dabei durch Differenzenapproximation ersetzt. SAMARSKIJ [1984], S. 103ff., wendet die Integro-Interpolationsmethode auf den hier zu diskretisierenden Differentialoperator an, was im folgenden kurz dargestellt wird:

Betrachtet man die physikalische Herleitung der Diffusionsgleichung (siehe z. B. GERTHSEN UND VOGEL [1995], S. 238), so ist der Diffusionsstrom gegeben durch

$$w(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} -D(\mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \Rightarrow -\frac{\partial \zeta(\mu)}{\partial \mu} = \frac{w(\mu)}{D(\mu)} \quad (3.50)$$

Integriert über das Intervall $\mu_i \leq \mu \leq \mu_{i+1}$ ergibt sich

$$\zeta_i - \zeta_{i+1} = \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \frac{w(\mu)}{D(\mu)} d\mu \approx \tilde{w}_{i+1/2} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \frac{d\mu}{D(\mu)} \quad (3.51)$$

unter der Annahme, daß $w(\mu) \approx \tilde{w}_{i+1/2} = \text{const}$ in dem betrachteten Intervall ist. Daraus folgt der Näherungswert $\tilde{w}_{i+1/2}$ für den Diffusionsstrom

$$\tilde{w}_{i+1/2} = -a_{i+1/2} \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\Delta \mu} \quad \text{mit} \quad a_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{\Delta \mu} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \frac{d\mu}{D(\mu)} \right)^{-1} \quad (3.52)$$

⁸Die Koeffizienten a_i sind nicht mit dem Koeffizienten a aus der Advektionsgleichung Abschnitt 3.2.1.1 zu verwechseln.

Schreibt man die Gleichung in eine Form um, bei der die Analogie zum Ohmschen Gesetz ersichtlich wird

$$R_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \frac{d\mu}{D(\mu)} = -\frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\tilde{w}_{i+1/2}} \quad (3.53)$$

so erkennt man die Bedeutung des Integrals als *Diffusionswiderstand* $R_{i+1/2}$ des Abschnitts $[\mu_i, \mu_{i+1}]$. Für den Koeffizienten $a_{i+1/2}$ können Näherungen angegeben werden. Nimmt man z. B. an, daß $D(\mu) \approx D_{i+1/2} = \text{const}$ in dem betrachteten Intervall ist, so ergibt sich

$$a_{i+1/2} \approx D_{i+1/2} \quad (3.54)$$

Im allgemeinen kann gesagt werden, daß die Näherung von $a_{i+1/2}$ nur für PWSKs verwendet werden sollte, die sich durch das gewählte μ -Raster hinreichend gut approximieren lassen. Zeigt der PWSK innerhalb der Rasterauflösung weiterhin einen steilen Funktionsverlauf, so kann dies durch die Wahl von $a_{i+1/2}$ aus Gleichung (3.52) teilweise kompensiert werden. Es ist aber darauf hinzuweisen, daß bei einem zu groben Raster bzw. zu steilen Verlauf des PWSK auch dies nicht viel nützt, da die verwendete Näherung $w(\mu) \approx \text{const}$ in den μ -Intervallen keine Gültigkeit mehr besitzt.

Betrachtet man nun das $\mu_{i-1/2}$ -Gitter

$$\mu_{i-1/2} = -1 + i \Delta\mu \quad i = 0, 1, \dots, I \quad \text{mit} \quad I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\Delta\mu} \quad (3.55)$$

auf dem die $a_{i+1/2}$ -Koeffizienten definiert sind, so wird deutlich, daß es zum einen um $\Delta\mu/2$ gegen das μ_i -Gitter der Funktionswerte ζ_i verschoben ist und zum anderen einen Gitterpunkt mehr besitzt. Die Randpunkte $\mu_{-1/2}$ und $\mu_{I-1/2}$ kommen somit genau auf den Intervallgrenzen des Definitionsbereiches von μ zu liegen. Dies ist wichtig, da so die Randbedingung⁹ eines identisch verschwindenden Diffusionsstroms an den Intervallgrenzen durch die folgende Wahl der Koeffizienten

$$a_{-1/2} = 0 \quad \text{und} \quad a_{I-1/2} = 0 \quad (3.56)$$

berücksichtigt werden kann.

Die korrekte Umsetzung der Randbedingung des μ -Transportes bringt jedoch den Nachteil mit sich, daß das μ_i -Gitter der Funktionswerte ζ_i die Werte $\mu_i = \pm 1$ nicht abdeckt. Die maximalen μ -Werte und damit die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit $v_{\max} = \mu_{\max} v$ werden durch die Anzahl I der Gitterpunkte beschränkt:

$$\mu_{\min/\max} = \pm \left(-1 + \frac{\Delta\mu}{2} \right) = \pm \frac{1 - I}{I} \quad (3.57)$$

Es gibt keine Teilchen, die sich mit einer Geschwindigkeit $v_{\max} > v(I - 1)/I$ ausbreiten können, was im Widerspruch zur Transportgleichung steht. EARL ET AL. [1995]

⁹Randbedingungen der Gestalt

$$a \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} = 0$$

werden auch als Randbedingungen zweiter Art bzw. Neumann-Bedingungen bezeichnet (vgl. GROSSMANN UND ROOS [1994], S. 13).

weisen darauf hin, daß sowohl die finite Differenzen-Methode als auch die Monte-Carlo-Methode dieser Einschränkung unterworfen sind. Lediglich die Methode der Entwicklung nach Eigenfunktionen als eine eher analytische Methode ist frei von diesem numerischen Problem. Wählt man eine typische Rasterauflösung von $I = 40$, so ist der Wert $\mu_{\min/\max} = \mp 0.975$ jedoch so dicht bei ∓ 1 , daß sich der Unterschied kaum bemerkbar macht.

Besondere Bedeutung kommt dem Gitterpunkt $a(\mu = 0) = a_0$ zu, wie schon NG AND WONG [1979] bemerkt haben. Obwohl der PWSK $D(\mu)$ für $H = 0$ eine Nullstelle bei $\mu = 0$ hat, verschwindet der Diffusionsstrom in den Halbraum $[-1, 0)$ nicht identisch, da der Gradient $\partial\zeta/\partial\mu$ unendlich wird. Für die mittlere freie Weglänge ergibt sich daher ein endlicher Wert. Dieses Verhalten ist mit dem hier eingeführten diskreten μ -Raster nicht zu approximieren, da $a_0 = 0$ unweigerlich dazu führt, daß kein Teilchenstrom durch $\mu = 0$ möglich ist. NG AND WONG [1979] wählen nun a_0 dergestalt, daß der Teilchenstrom des numerischen Differenzenverfahrens durch $\mu = 0$ dem der analytischen Lösung angepaßt wird. Der so bestimmte Wert für a_0 ist größer null und ermöglicht daher den geforderten Teilchenstrom durch $\mu = 0$.

Die Herleitung von NG AND WONG [1979] wird im folgenden in einem übergreifenden Kontext betrachtet, um so Aussagen zu treffen, die von allgemeiner Bedeutung sind und weit über die bloße Anpassung des a_0 -Koeffizienten hinausgehen.

Betrachtet man das elliptische Randwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \left[b(\mu)\zeta - D(\mu)\frac{\partial\zeta}{\partial\mu} \right] = f(\mu) \quad (3.58)$$

$$\text{mit} \quad b(\mu) = \frac{1 - \mu^2}{2L(s)} \quad \text{und} \quad D(\mu) = A(1 - \text{sign}(\mu)\hat{\sigma})(|\mu|^{\hat{q}-1} + H)(1 - \mu^2)$$

so ergibt sich für den Fluß $F(\mu_{i+1/2}) = F_{i+1/2}$ über die Zellgrenze

$$F_{i+1/2} = b_{i+1/2}\zeta(\mu_{i+1/2}) - D_{i+1/2}\frac{\partial\zeta(\mu_{i+1/2})}{\partial\mu_{i+1/2}} \quad (3.59)$$

RUFFOLO [1991] benutzt nun für den Fluß den Ansatz $F_{i+1/2} = F_0(1 - \mu_{i+1/2}^2)$ (private Mitteilung vom 14.3.1996), wodurch sich die Gleichung vereinfacht zu

$$F_0 = \tilde{b}\zeta(\mu) - \tilde{D}(\mu)\frac{\partial\zeta(\mu)}{\partial\mu} \quad (3.60)$$

$$\text{mit} \quad b_{i+1/2} = (1 - \mu_{i+1/2}^2)\tilde{b} \quad \text{und} \quad D_{i+1/2} = (1 - \mu_{i+1/2}^2)\tilde{D}_{i+1/2}$$

wobei angenommen wird, daß die Gleichung näherungsweise für $\zeta(\mu) = \zeta(\mu_i)$ und $\zeta(\mu_{i+1})$ gelten soll. Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung ist

$$\zeta(\mu) = \frac{F_0}{\tilde{b}} + C \exp(\delta(\mu)) \quad \text{mit} \quad \delta(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{b} \int \frac{d\mu}{\tilde{D}(\mu)} \quad (3.61)$$

Es ergeben sich somit an den Gitterpunkten μ_i und μ_{i+1}

$$\zeta_i \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(\mu_i) \approx \frac{F_0}{\tilde{b}} + C \exp(\delta(\mu_i)) \quad (3.62)$$

$$\zeta_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(\mu_{i+1}) \approx \frac{F_0}{\tilde{b}} + C \exp(\delta(\mu_{i+1})) \quad (3.63)$$

Ersetzen der Konstanten C ergibt

$$F_{i+1/2} \approx b_{i+1/2} \zeta_{i/i+1} - b_{i+1/2} \frac{\Delta\mu}{2} (\alpha(\mu_{i+1/2}) - \text{sign}(b_{i+1/2})) \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\Delta\mu} \quad (3.64)$$

bzw.

$$F_{i+1/2} \approx b_{i+1/2} \frac{\zeta_{i+1} + \zeta_i}{2} - b_{i+1/2} \frac{\Delta\mu}{2} \alpha(\mu_{i+1/2}) \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\Delta\mu} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \alpha(\mu_{i+1/2}) &\stackrel{\text{def}}{=} \coth\left(\frac{1}{2}[\delta(\mu_{i+1}) - \delta(\mu_i)]\right) \\ &= \coth\left(\frac{\tilde{b}\Delta\mu}{2\tilde{a}_{i+1/2}}\right) \quad \text{mit } \tilde{a}_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{\Delta\mu} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \frac{d\mu}{\tilde{D}}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Die Terme auf der rechten Seite der Gleichungen (3.64) und (3.65) können nun als die Flüsse der unterschiedlichen Diskretisierung wiedererkannt werden:

$$F_1 = b_{i+1/2} \zeta_{i/i+1} \quad \text{einseitige Differenz} \quad \text{mit } b_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \mu_{i+1/2}^2}{2L(s)} \quad (3.67)$$

$$F_2 = b_{i+1/2} \frac{\zeta_{i+1} + \zeta_i}{2} \quad \text{zentrale Differenz} \quad \text{mit } b_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \mu_{i+1/2}^2}{2L(s)} \quad (3.68)$$

$$F_3 = \hat{a}_{i+1/2} \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\Delta\mu} \quad \text{zentrale Differenz} \quad \text{für den Diffusionsstrom} \quad (3.69)$$

$$\text{mit } \hat{a}_{ei+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{i+1/2} (\coth(\rho_{i+1/2}) - \text{sign}(b_{i+1/2})) a_{i+1/2} \quad (3.70)$$

$$\text{bzw. } \hat{a}_{zi+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{i+1/2} \coth(\rho_{i+1/2}) a_{i+1/2} \quad (3.71)$$

$$\text{und } \rho_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{b}\Delta\mu}{2\tilde{a}_{i+1/2}} \quad a_{i+1/2} = (1 - \mu_{i+1/2}^2) \tilde{a}_{i+1/2}$$

Das Ergebnis von NG AND WONG [1979] erhält man für $\mu_{i+1/2} = 0$, $H = 0$ und $\hat{q} < 2$:

$$a_0 = A(1 - \hat{\sigma}^2)(2 - \hat{q}) \left(\frac{\Delta\mu}{2}\right)^{\hat{q}-1} \quad \text{mit } A = \frac{3}{2\lambda_{||}(s)(1 - \hat{\sigma}^2)(2 - \hat{q})(4 - \hat{q})} \quad (3.72)$$

womit gewährleistet ist, daß a_0 für den Grenzübergang $\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0}$, d. h. für den Übergang zum kontinuierlichen Problem, identisch verschwindet.

Während NG AND WONG [1979] sich auf die Bestimmung des Wertes von a_0 beschränken, kann mit Hilfe der Gleichungen (3.70) und (3.71)¹⁰ der Wert des Diffusionskoeffizienten $D_{i+1/2}$ je nach Diskretisierung des Fokussierungsterms für alle Stützstellen angepaßt werden. Demnach ist $\hat{a}_{ei+1/2}$ aus der Gleichung (3.70) der an das Differenzenverfahren angepaßte Koeffizient mit einseitiger Approximation des Fokussierungsterms, während $\hat{a}_{zi+1/2}$ aus der Gleichung (3.71) den für die zentrale Approximation des Fokussierungsterms angepaßten Koeffizienten wiedergibt. Der in Gleichung (3.53) eingeführte Diffusionswiderstand ist in Gleichung (3.66) wiederzuerkennen. Der Koeffizient, über den integriert wird, ist aber \tilde{D} und nicht

¹⁰Die Gleichung ist identisch mit der Gleichung (4) aus RUFFOLO [1991], da $\kappa(s, \mu) = \varphi(s, \mu)/2$.

D. Während bei der Herleitung der Gleichung (3.52) der Diffusionsterm separat betrachtet wurde, ist nun der Fokussierungsterm mit berücksichtigt worden. Durch den Ansatz für den Fluß $F_{i+1/2}$ ist der Faktor $(1 - \mu^2)$, der seine Ursache in der Wahl des Pitchkosinus μ als Variable hat, abgespalten worden, wodurch das so reduzierte Problem einfacher zu behandeln ist.

Ein tieferes Verständnis der Bedeutung der Koeffizienten $\hat{a}_{ei+1/2}$ und $\hat{a}_{zi+1/2}$ ist nur im Rahmen der gemeinsamen Diskretisierung der Terme II und III möglich. Es wird daher nun, nachdem die Diskretisierung der einzelnen Terme des μ -Transportes abgeschlossen ist, auf das Zusammenwirken der Diskretisierungen der einzelne Terme II und III eingegangen.

a) Wird der Fokussierungsterm durch eine einseitige Differenz approximiert, so hat das daraus resultierende Verfahren gute Stabilitätseigenschaften. Es wirkt sich jedoch nachteilig aus, daß die geringe Approximationsordnung der einseitigen Differenz, nur von erster Ordnung ist. Dennoch ist es SAMARSKIJ [1984], S. 123 gelungen für die Diskretisierung der Terme I und II ein Schema zu konstruieren, das von zweiter Approximationsordnung ist¹¹

$$L_{\Delta\mu}^1 \zeta_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_{i+1/2} \zeta_i - b_{i-1/2} \zeta_{i-1}}{\Delta\mu} - \frac{1}{(\Delta\mu)^2} [\tilde{\chi}_{i+1/2} a_{i+1/2} (\zeta_{i+1} - \zeta_i) - \tilde{\chi}_{i-1/2} a_{i-1/2} (\zeta_i - \zeta_{i-1})] \quad (3.73)$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\chi}_{i+1/2}(\rho_{i+1/2}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \rho_{i+1/2}} \quad \text{und} \quad \rho_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{b}\Delta\mu}{2\tilde{a}_{i+1/2}}$$

Dies wird ermöglicht durch den Parameter $\tilde{\chi}_{i+1/2}$, der für eine Abschwächung des Diffusionsterms sorgt, wenn die Fokussierung im Verhältnis zur Diffusion zunimmt. Man kann dies auch als Abhängigkeit von der *Zellen-Reynoldszahl*

$$Re \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{b}\Delta\mu}{\tilde{a}} \quad (3.74)$$

auffassen. Die Zellen-Reynoldszahl ist in Analogie zur Reynoldszahl aus der Strömungslehre definiert (vgl. GERTHSEN UND VOGEL [1995], S. 117; LANDAU UND LIFSCHITZ [1991], S. 73]), die ein Maß für das Verhältnis zwischen konvektivem und diffusivem Anteil angibt. Da das ursprünglich von Samarskij angegebene Schema nicht in konservativer Form formuliert ist, wird in Anhang C auf die Stabilitätseigenschaften des hier vorgestellten konservativen Schemas eingegangen.

Statt des von SAMARSKIJ [1984] verwendeten Parameters $\tilde{\chi}_{i+1/2}$ kann auch der aus Gleichung (3.70) abgeleitete Parameter

$$\hat{\chi}_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{i+1/2} (\coth(\rho_{i+1/2}) - \text{sign}(b_{i+1/2})) \quad (3.75)$$

verwendet werden. Beide χ -Parameter haben die gleichen Grenzwerte für

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \chi = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \chi = 0 \quad (3.76)$$

¹¹Es wird im folgenden $b > 0$ angenommen. Für $b < 0$ ist bei der Diskretisierung des Fokussierungsterms auf eine Vorwärtsdifferenz überzugehen.

Der $\hat{\chi}$ -Parameter strebt jedoch schneller gegen null, wodurch sich unterschiedliche Ergebnisse für große Zellen-Reynoldszahlen ergeben.

Vergleiche zwischen numerischen Lösungen und der stationären analytischen Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen (siehe Abschnitt 2.2.2) haben eine bessere Übereinstimmung für den $\hat{\chi}$ -Parameter ergeben. Wird im weiteren Verlauf der Arbeit von dem Samarskij-Schema gesprochen, so ist damit das Schema aus Gleichung (3.73) mit dem $\hat{\chi}$ -Parameter aus Gleichung (3.75) gemeint.

b) Wird der Fokussierungsterm hingegen durch eine zentrale Differenz approximiert, so ist die Approximation zwar von zweiter Ordnung, führt aber zu folgendem zusätzlichen Stabilitätskriterium (siehe GROSSMANN UND ROOS [1994], S. 347)

$$\max\left(\frac{b}{a_{i+1/2}}\right)\Delta\mu < 2 \quad \text{bzw.} \quad \max(\rho_{i+1/2}) < 1 \quad (3.77)$$

Wie man erkennt, hängt auch dieses Stabilitätskriterium von der Zellen-Reynoldszahl ab. Wird das Stabilitätskriterium eingehalten, so ist der stabilisierende Beitrag des Diffusionsterms stark genug, um die Stabilität des gesamten Schemas zu gewährleisten. Für sehr schwache Diffusion kann das Stabilitätskriterium jedoch eine Beschränkung darstellen, die praktisch nicht zu erfüllen ist.

Führt man bei der Diskretisierung, wie schon bei dem Samarskij-Schema, einen Parameter $\bar{\chi}_{i+1/2}$ vor dem Diffusionsterm ein

$$L_{\Delta\mu}^2 \zeta_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_{i+1/2}(\zeta_{i+1} - \zeta_i) - b_{i-1/2}(\zeta_i + \zeta_{i-1})}{\Delta\mu} - \frac{1}{(\Delta\mu)^2} [\bar{\chi}_{i+1/2} a_{i+1/2}(\zeta_{i+1} - \zeta_i) - \bar{\chi}_{i-1/2} a_{i-1/2}(\zeta_i - \zeta_{i-1})] \quad (3.78)$$

so kann das Stabilitätskriterium durch die Wahl

$$\bar{\chi}_{i+1/2}(\rho_{i+1/2}) > \rho_{i+1/2} \quad (3.79)$$

umgangen werden.¹²

Zusätzlich zu dem Problem der Stabilität ergibt sich noch das Problem, daß die $D(\mu)$ -Abhängigkeit der exakten Lösung dergestalt ist, daß der Konsistenzfehler bei Standarddifferenzenverfahren — dazu gehört auch das Samarskij-Verfahren — für $D(\mu) \rightarrow 0$ bei fester (beliebig kleiner) Schrittweite unbeschränkt wächst. Grund hierfür ist die Struktur des elliptischen Operators II+III, die zu sogenannten singular gestörten Problemen führt (vgl. GROSSMANN UND ROOS [1994], S. 341).

Durch die Wahl des Parameters $\bar{\chi}_{i+1/2}$ aus der Gleichung (3.71)

$$\bar{\chi}_{i+1/2}(\rho_{i+1/2}) = \rho_{i+1/2} \coth(\rho_{i+1/2}) \quad (3.80)$$

¹²Der Diffusionsterm wird demnach für große Zellen-Reynoldszahlen verstärkt und nicht abgeschwächt wie beim Samarskij-Verfahren. Man spricht daher auch von künstlicher Diffusion, die eingeführt wird, um die Stabilität des Verfahrens für beliebige Zellen-Reynoldszahlen zu erreichen.

kann das Schema nun an das singular gestörte Problem angepaßt werden, so daß man das bekannte Il'in-Verfahren¹³ erhält (zu weiteren Ableitungen des Il'in- und verwandter Verfahren siehe ROOS [1994]).

Die hier verwendete Variante des Il'in-Verfahrens *konvergiert gleichmäßig* mit der Ordnung eins in der diskreten Maximumsnorm, d. h.

$$\max_i |\zeta(\mu_i) - \zeta_i| \leq C \Delta\mu \quad (3.81)$$

mit von $D(\mu)$ und $\Delta\mu$ unabhängigem C .

Ist die Diffusion hinreichend groß ($D(\mu) \geq D_0(\mu) > 0$), so konvergiert das Il'in-Verfahren mit der Ordnung zwei. Für $D(\mu) \rightarrow 0$ verliert das Il'in-Verfahren jedoch eine Konvergenzordnung, konvergiert aber dennoch gleichmäßig gegen die exakte Lösung. Eine sehr präzise Analyse mit numerischen Beispielen findet sich bei KELLOGG AND TSAN [1978], wo sowohl das ursprüngliche Samarskij-Verfahren als auch das ursprüngliche Il'in-Verfahren untersucht werden. Eigene Vergleiche mit analytischen Lösungen für stationäre Verhältnisse und konstante Ausbreitungsbedingungen haben bestätigt, daß das Il'in-Verfahren geringfügig bessere Resultate liefert als das Samarskij-Verfahren.

Nachdem sich gezeigt hat, daß das Il'in-Verfahren optimal an den μ -Transport angepaßt ist, stellt sich die Frage, ob die Approximationsordnung von eins in der Zeit nicht noch verbessert werden kann, ohne daß die positiven Stabilitätseigenschaften des impliziten Verfahrens aufgegeben werden. Unter Verwendung des Operators $L_{\Delta\mu}^2$ und unter Einführung des reellen Parameters $\Theta \in [0, 1]$ kommt man zu der einparametrischen Familie von Differenzenverfahren

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta\tau} + (1 - \Theta)L_{\Delta\mu}^2\zeta_i^n + \Theta L_{\Delta\mu}^2\zeta_i^{n+1} = 0 \quad (3.82)$$

mit dem hinreichenden Stabilitätskriterium in der Maximumsnorm¹⁴

$$\frac{\Delta\tau}{(\Delta\mu)^2} (1 - \Theta) 2 \max[\rho_{i+1/2} \coth(\rho_{i+1/2}) a_{i+1/2}] \leq 1 \quad (3.83)$$

aus der Diskretisierung des Diffusionsterms (siehe GROSSMANN UND ROOS [1994], S. 302).

1. Für $\Theta = 1$ erhält man das bereits besprochene implizite Schema vom Il'in-Typ.
2. Für $\Theta = 0$ erhält man das explizite Schema vom Il'in-Typ, das aus den bei der Diskretisierung der zeitlichen Ableitung genannten Gründen nicht weiter verfolgt werden soll.
3. Wählt man hingegen $\Theta = \frac{1}{2}$ (*Crank-Nicholson-Verfahren* bzw. *trapezoides Verfahren*), so entspricht dies einer impliziten Diskretisierung in der Zeit durch eine zentrale Differenz, wodurch eine Konvergenzordnung von zwei in der Zeit erreicht wird. Von Nachteil

¹³Da das hier verwendete Schema nicht identisch mit dem ursprünglichen Il'in-Schema [IL'IN, 1969] ist (Konvektionsterm in nichtkonservativer Form und $D(\mu) = \text{const}$), wird im Anhang C auf die Stabilitätseigenschaften eingegangen.

¹⁴Aus der Stabilität in der Maximumsnorm folgt unmittelbar die Monotonizität des Schemas, d. h. die Funktionswerte ζ^{n+1} bleiben alle nicht negativ für die Anfangsbedingung $\zeta_i^0 \geq 0$ (siehe WINDISCH AND SIEDOW [1991], S. 13ff.).

dabei ist das Stabilitätskriterium (3.83) in der diskreten Maximumsnorm, das den Zeitschritt für kleine $\Delta\mu$ sehr einschränkt. Betrachtet man die Stabilität in der L_2 -Norm (Skalarproduktnorm), so entfällt hingegen das Stabilitätskriterium (3.83). Dieses Verhalten kann so verstanden werden, daß die Crank-Nicholson-Variante im Mittel (L_2 -Norm) stabil ist, nicht jedoch für jeden einzelnen Punkt (diskrete Maximumsnorm). In der Praxis hat sich gezeigt, daß nicht das Stabilitätskriterium in der Maximumsnorm die entscheidende Beschränkung darstellt, sondern die Tatsache, daß die hochfrequenten Anteile der Lösung nicht schnell genug gedämpft werden und sich so hochfrequente Oszillationen einstellen, die sogar zu negativen Funktionswerten führen können. Differenzenverfahren, die in der L_2 -Norm stabil sind, die hochfrequenten Anteile aber nicht der exakten Lösung entsprechend schnell genug dämpfen, werden als A_0 -stabil bezeichnet. Werden die hochfrequenten Anteile hingegen angemessen gedämpft, so spricht man von L_0 -Stabilität (vgl. SMITH [1985], S. 120ff.).

Das implizite ($\Theta = 1$) Verfahren vom Il'in-Typ ist L_0 -stabil, die Crank-Nicholson-Variante ($\Theta = \frac{1}{2}$) hingegen nur A_0 -stabil. Möchte man dennoch mit der Crank-Nicholson-Variante arbeiten, um die Konvergenzordnung von zwei in der Zeit zu nutzen, so bieten sich zwei Möglichkeiten. Zum einen kann der Zeitschritt hinreichend klein gewählt werden, so daß die höchstfrequente Komponente schneller gegen null gedämpft wird als die niedrigstfrequente Komponente. Dies führt zu folgender Beschränkung des Zeitschrittes (siehe SMITH [1985], S. 122)

$$\Delta\tau < \frac{\Delta\mu X}{\pi\tilde{a}_{i+1/2}} \quad (3.84)$$

wobei $X = 2$ die Größe des Pitchkosinusintervalls $\mu \in [-1, 1]$ wiedergibt. Da diese Beschränkung für sehr schwache Diffusion jedoch unrealistische Forderungen an den Zeitschritt stellen kann, wird die folgende Möglichkeit favorisiert: In den Bereichen der Lösung, in denen sich sehr anisotrope PWVs einstellen und damit auch hochfrequente Anteile vorhanden sind, z. B. in der Anfangsphase eines Ereignisses, wird zunächst mit dem L_0 -stabilen impliziten Verfahren vom Il'in-Typ gerechnet, um dann später bei einer weniger stark anisotropen PWV auf die Crank-Nicholson-Variante überzugehen. Auf diese Weise werden die positiven Eigenschaften beider Verfahren, L_0 -Stabilität und zweite Konvergenzordnung in der Zeit, miteinander verknüpft, ohne daß der Zeitschritt eingeschränkt werden muß.

3.2.3 Das zeitliche Aufspaltungsschema

Nachdem in den Abschnitten 3.2.1.1 und 3.2.2 der s - und μ -Transport separat gelöst worden sind, gilt es nun, daraus ein Schema zu konstruieren, das die vollständige Transportgleichung löst. Dies führt zu den *additiven Differenzenverfahren*. Sei $L_1(t, s, \mu)$ der Differenzenoperator, der den s -Transport approximiert und $L_2(t, s, \mu)$ der Differenzenoperator, der den μ -Transport approximiert, so kann der Differenzenoperator $L(t, s, \mu)$, der die vollständige Transportgleichung approximiert (im Sinne der summarischen Approximation, siehe SAMARSKIJ [1984], S. 279ff.) folgendermaßen geschrieben werden:

$$L(t, s, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} L_1(t, s, \mu) + L_2(t, s, \mu) + O(\Delta\tau) \quad (3.85)$$

Die mehrdimensionale Aufgabe ist damit in eine Folge eindimensionaler Aufgaben überführt worden, deren Lösungen bereits bekannt sind. Die Namen für diese Methode sind in der

Literatur vielfältig, z. B. *Locally One-Dimensional (L.O.D.) Method* ([MITCHELL AND GRIF-FITHS, 1980], S. 216), *Splitting and Fractional-Step Method* ([RICHTMYER AND MORTON, 1967], S. 216), *Fractional Time Step and Time Splitting Method* ([ROACH, 1982], S. 82) u. a. Der Approximationsfehler ist in der Regel von linearer Ordnung, es sei denn, das Problem ist schon von der Gestalt, daß es sich durch einen Separationsansatz (Produktansatz) in separate eindimensionale Probleme zerlegen läßt. In diesem Fall ist das additive Differenzenverfahren exakt. Ein Beispiel hierfür ist die stationäre Transportgleichung für konstante Ausbreitungsbedingungen. Sowohl SAMARSKIJ [1984], S. 297f. als auch MARCHUK [1975], S. 172ff. geben nun ein Verfahren an, dessen Approximationsfehler — gewisse Glattheitsvoraussetzungen an die Operatoren L_1, L_2 und an die Anfangswerte vorausgesetzt — von quadratischer Ordnung ist:

$$L(t, s, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_1 + O((\Delta\tau)^2) \quad (3.86)$$

Es wird demnach der Zeitschritt halbiert, um nach der Hälfte des Zeitschrittes die Reihenfolge der Differenzenoperatoren zu vertauschen. Man kann diesen Umstand auch so verständlich machen, daß die Operatoren L_1 und L_2 nicht vertauschen (kommutieren) und es somit nicht gleichgültig ist, wie die Reihenfolge der Differenzenoperatoren gewählt wird. Durch das Vertauschen der Reihenfolge wird die willkürliche Wahl einer bestimmten Reihenfolge vermieden, wodurch sich der Approximationsfehler verringert.

Bemerkenswert ist, daß dies auch für Probleme der Dimension $p > 2$ gilt:

$$L = \sum_{n=1}^{2p} L'_n \quad \text{mit} \quad L'_n = \begin{cases} \frac{1}{2}L_n & : 1 \leq n \leq p \\ \frac{1}{2}L_{2p-n+1} & : p < n \leq 2p \end{cases} \quad (3.87)$$

Für die hier betrachtete Transportgleichung ergeben sich speziell für geringe solare Abstände r und starke Diffusion signifikant bessere Ergebnisse für die Legendre-Koeffizienten g_{1s} und g_{3s} , wie dies Abbildung 3.4 zeigt. Der Grund hierfür ist die sich räumlich stark ändernde Fokussierungslänge L , die selbst auf einem feinen räumlichen Gitter noch deutlich variiert und so den Separationsansatz des Verfahrens (3.85) nur für sehr kleine Zeitschritte $\Delta\tau$ rechtfertigt. Dies ist besonders für den g_{1s} -Koeffizienten von Bedeutung, da nach Gleichung (2.64) g_{1s} proportional zum Stromdichtevektor ist, der im stationären Gleichgewicht nach der Kontinuitätsgleichung räumlich konstant sein muß. Durch die ungeeignete Approximation des μ - s -Transportes und des s - μ -Transportes wird jedoch der Eindruck erweckt, daß sich die Lösung noch nicht im stationären Gleichgewicht befindet, da ein von null verschiedener räumlicher Gradient des g_{1s} -Koeffizienten existiert. Wendet man hingegen das Verfahren nach Gleichung (3.86) an, so verschwindet der räumliche Gradient bei gleicher Ausbreitungszeit der Teilchen. Ein geringfügiger Nachteil ist die Schwingung, die sich für sehr kleine radiale Abstände und damit für sehr extreme Ausbreitungsbedingungen einstellt. Der Ursache dürfte eine Verletzung der Glattheitsvoraussetzungen durch den L_2 -Differenzenoperator sein, da das gewählte räumliche Raster für die sich stark ändernden Ausbreitungsbedingungen zu grob ist.

Abschließend soll noch einmal auf die Stabilität und die Konsistenzordnung des Aufspaltungsschemas und damit des Verfahrens zur Lösung der vollständigen Transportgleichung eingegangen werden. Das Verfahren ist stabil, wenn der s - und μ -Transport für sich betrachtet stabil sind. Das bedeutet speziell für den expliziten s -Transport die Einhaltung der CFL-Stabilitätsbedingung. Bei dem Il'in-Verfahren ist darauf zu achten, daß in Bereichen der

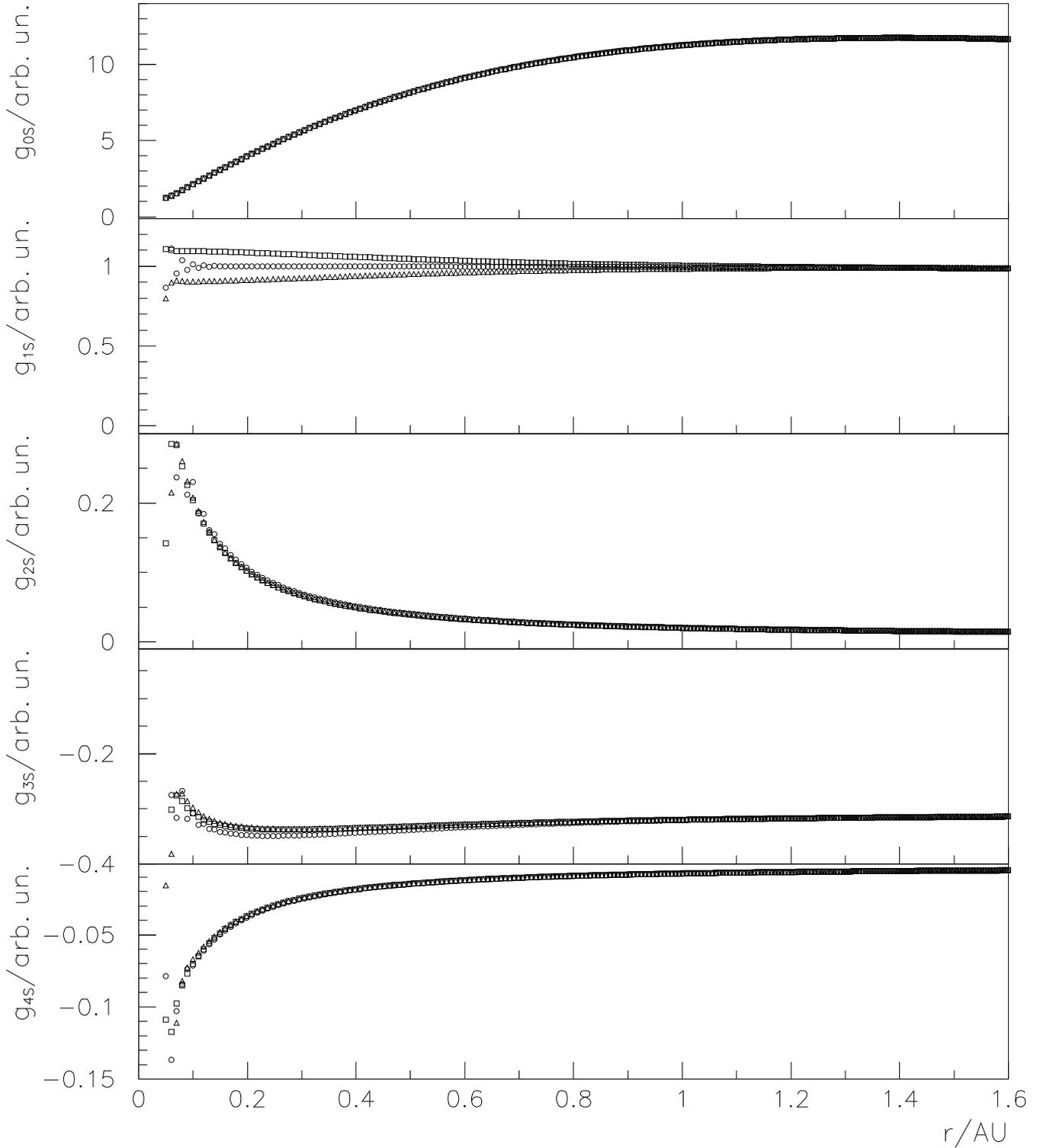


Abbildung 3.4: Die Legendre-Koeffizienten g_{0s} – g_{4s} der stationären Lösung für $\lambda_{\parallel} = 0.05$ AU, $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ sind in ihrem räumlichen Verlauf dargestellt. Dabei sind die Ergebnisse mit drei Varianten des Aufspaltungsschemas des s - und μ -Transportes berechnet worden: Quadrate = μ - s -Transport; Dreiecke = s - μ -Transport und Kreise = $1/2s$ - $1/2\mu$ - $1/2\mu$ - $1/2s$ -Transport.

Lösung mit einer hohen Anisotropie mit der impliziten Variante gerechnet wird, um dann im späteren zeitlichen Verlauf auf die Crank-Nicholson-Variante überzugehen.

Die Konsistenzordnung des Verfahrens wird durch die niedrigste Konsistenzordnung im s - bzw. μ -Transport festgelegt. Die Konsistenzordnung kann daher im ungünstigsten Fall auf eins zurückgehen. Hat die Lösung hingegen

1. keinen starken räumlichen Gradienten
 \Rightarrow Approximationsfehler des s -Transportes $O((\Delta\tau)^2 + (\Delta s)^2)$
2. hinreichend starke Diffusion
 \Rightarrow Approximationsfehler des μ -Transportes $O(\Delta\tau + (\Delta\mu)^2)$
 und wird die Lösung
3. zu späten Zeiten betrachtet
 \Rightarrow Approximationsfehler des μ -Transportes $O((\Delta\tau)^2 + (\Delta\mu)^2)$

so ist das Verfahren konvergent von der Ordnung zwei.

3.2.4 Die Injektionsfunktion

Mit dem hier vorgestellten Verfahren zur numerischen Lösung der Transportgleichung soll ausschließlich die Ausbreitung von solaren energiereichen Teilchen berechnet werden. Es ist daher möglich die zeitabhängige Injektionsfunktion entweder durch eine in der Zeit variable innere Randbedingung¹⁵ $q_r(t, \mu)$ zu berücksichtigen oder durch die Quellfunktion $q(t, s = s_a, \mu)$, die die Teilchen am inneren Rand s_a injiziert.

Für den Fall einer zeitlich variablen Quellfunktion $q(t, s = s_a, \mu)$ (vgl. RUFFOLO [1991]) wird die Phasenraumdichte der Quellfunktion ihrer t - und μ -Abhängigkeit entsprechend zu den Funktionswerten ζ_{i0}^n an der inneren Grenze hinzuaddiert

$$\zeta_{i0}^{n+1} = \zeta_{i0}^n + \tilde{q}(n \Delta\tau, s_a, \mu_i) \cdot \Delta\tau \quad \text{mit} \quad \tilde{q}(\tau, s_a, \mu) = \frac{1}{v} q(t, s_a, \mu) \quad (3.88)$$

Dies entspricht der inhomogenen Transportgleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial s} (v\mu\zeta) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{v}{2L} (1 - \mu^2) \zeta \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\kappa(s, \mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right) = \tilde{q}(\tau, s_a, \mu) \quad (3.89)$$

Da diese Methode generell nicht auf den Spezialfall $s = s_a$ beschränkt ist, kann auf diese Weise auch eine räumlich ausgedehnte oder eine sich im interplanetaren Raum ausbreitende Quelle $q(t, s(t), \mu)$ (z. B. eine interplanetare Schockwelle) berechnet werden.

In dem in dieser Arbeit verwendeten Schema wird die Injektionsfunktion jedoch durch eine zeitlich variable Randbedingung realisiert. Bereits WONG [1982], S. 18 hat diese Methode bevorzugt, bei der die Quellfunktion $q_r(t, \mu)$ als Randbedingung für den s -Transport mit $\mu > 0$ eingeht. Für das upwind-Verfahren folgt daraus:

$$\zeta_{i0}^{n+1} = \zeta_{i0}^n + \gamma_i (\tilde{q}_r(n \Delta\tau, \mu_i) - \zeta_{i0}^n) \quad \text{mit} \quad \gamma_i = \mu_i \frac{\Delta\tau}{\Delta s} \quad (3.90)$$

¹⁵Randbedingungen der Gestalt

$$\zeta = q_r(t, \mu)$$

werden auch als Randbedingungen erster Art bzw. Dirichlet-Bedingungen bezeichnet (vgl. GROSSMANN UND ROOS [1994], S. 13.

Wie bereits bei NG AND WONG [1981] und WONG [1982], S. 58 gezeigt, hat der μ -Verlauf der Injektionsfunktion kaum Einfluß auf die numerische Lösungen für radiale Abstände $r \geq 0.3$ AU. Dieser Effekt ist auf die starke Fokussierung in der Umgebung der inneren Grenze zurückzuführen, die verschiedene μ -Verläufe der Injektionsfunktion zu einer sehr stark vorwärtsgerichteten PWV fokussiert. Für das in dieser Arbeit verwendete Schema wird ein isotroper μ -Verlauf im positiven Halbraum ($\mu \geq 0$) der Injektionsfunktion angenommen.

Für den zeitlichen Verlauf der Injektion wird das von SCHLÜTER [1985], S. 21 vorgezogene Reid-Axford-Profil

$$q_r(t) = \frac{C}{t} \exp\left(-\frac{t_A}{t} - \frac{t}{t_V}\right) \quad \text{mit } t \geq 0 \quad (3.91)$$

verwendet, das durch die beiden Parameter t_A und t_V festgelegt ist.¹⁶ Die Zeitkonstanten t_A und t_V haben in dem von REID [1964] verwendeten Modell der koronalen Ausbreitung eine anschauliche Bedeutung. So ist z. B. die Anstiegszeit t_A umgekehrt proportional zu dem koronalen Diffusionskoeffizienten und die Entweichzeit t_V umgekehrt proportional zur Stärke des Entweichens von Teilchen aus der Diffusionsschicht entlang offener Feldlinien in den interplanetaren Raum. Auch wenn diese Anschauung sehr idealisiert ist, so lassen sich mit dem Reid-Axford-Profil dennoch eine Vielzahl von unterschiedlichen Zeitverläufen der Injektionsfunktion beschreiben.

In der Abbildung 3.5 sind exemplarisch drei Injektionsprofile, die auf eine konstante Anzahl injizierter Teilchen normiert sind, über der Zeit aufgetragen. Dabei wird deutlich, daß der Parameter t_A die Anfangsphase und der Parameter t_V die Spätphase des Injektionsprofils bestimmt. Je größer die Anstiegszeit t_A , desto langsamer verläuft der Anstieg, und je größer die Entweichzeit t_V , desto ausgedehnter ist das Injektionsprofil. Der mittlere Bereich des Injektionsprofils, in den das Maximum hineinfällt, wird hingegen von beiden Parametern geprägt. Die absolute Höhe des Maximums ist dabei für kleine Entweichzeiten größer, da sich die Anzahl der injizierten Teilchen auf einen kleineren Zeitabschnitt zusammendrängt.

Im folgenden Abschnitt ist im Zusammenhang mit der Berechnung der stationären Lösung die Wahl einer zeitunabhängigen inneren Randbedingung von Bedeutung. Die Injektionsfunktion \tilde{q}_r reduziert sich in diesem Fall auf

$$\tilde{q}_r(\mu) = \begin{cases} 0 & : \mu < 0 \\ C & : \mu \geq 0 \end{cases} \quad (3.93)$$

Berechnet man den Legendre-Koeffizienten g_{1s} der Injektionsfunktion, so ergibt sich

$$g_{1s} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \mu \tilde{q}_r(\mu) d\mu = \frac{3}{4} C \quad (3.94)$$

Daraus folgt nach Gleichung (2.64) eine Stromdichte $|\mathbf{S}_p|$ über die innere Grenze von

$$|\mathbf{S}_p| = \frac{v}{2} C \quad (3.95)$$

¹⁶Die Konstante C kann zur Normierung der Gesamtzahl der injizierten Teilchen verwendet werden, so daß sich bei einer Normierung auf eins folgende Konstante C ergibt:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2K_0 \left(2\sqrt{\frac{t_A}{t_V}}\right)} \quad (3.92)$$

Es wurde dabei GRÖBNER UND HOFREITER [1950] Integral 314.9e verwendet. Die Funktion K_0 ist die modifizierte Besselsche Funktion 2. Art, die auch als modifizierte Hankelfunktion bezeichnet wird (vgl. ABRAMOVITZ AND STEGUN, 1972; S. 374ff.).

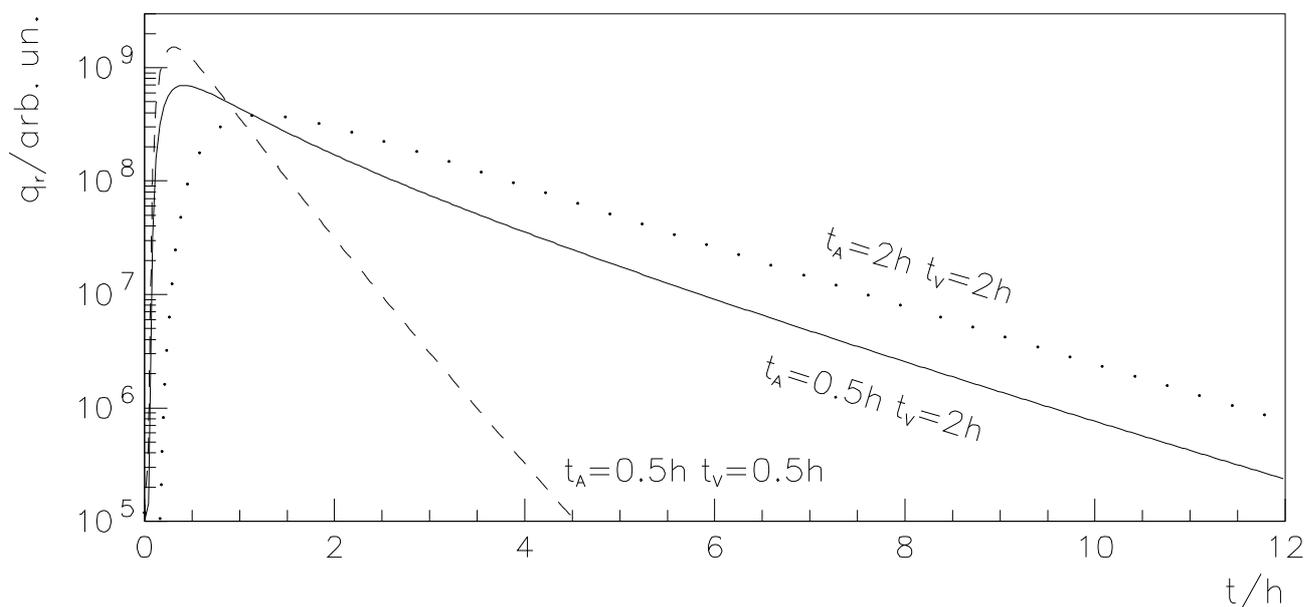


Abbildung 3.5: Die auf einheitliche Anzahl injizierter Teilchen normierten Reid-Axford-Profile sind exemplarisch für folgende Parametersätze aufgetragen: $t_A = 0.5$ h, $t_V = 2$ h (durchgezogene Kurve); $t_A = t_V = 0.5$ h (gestrichelte Kurve) und $t_A = t_V = 2$ h (gepunktete Kurve).

3.3 Die Berechnung der stationären Lösung

In den vorhergehenden Abschnitten wurde ausschließlich auf die Berechnung der zeitabhängigen Lösung $\zeta(t, s, \mu)$ eingegangen. Die stationäre Lösung läßt sich aus der zeitabhängigen Lösung berechnen, indem die Injektionsfunktion zeitunabhängig gewählt und der Grenzübergang $\lim_{t \rightarrow \infty}$ vollzogen wird. Praktisch ist dies natürlich nicht durchzuführen, da nur eine endliche Rechenzeit zur Verfügung steht. Für große t kann man jedoch — vorausgesetzt, die zeitabhängige Lösung konvergiert hinreichend schnell gegen den stationären Grenzfall — sehr gute Approximationen der stationären Lösung berechnen.

Zu diesem Zweck wird die Injektion der Teilchen durch die Wahl einer zeitunabhängigen inneren Randbedingung vorgegeben, die zusätzlich ein Entweichen der zurückgestreuten Teilchen verhindert. Die äußere Grenze ist hingegen offen, damit die Teilchen, bedingt durch die Fokussierung, von der inneren zur äußeren Grenze strömen können, um dort zu entweichen. Wäre die äußere Grenze ebenfalls geschlossen, so würde das Gebiet, auf dem die Transportgleichung berechnet wird, sich immer mehr mit Teilchen füllen, und ein stationäres Gleichgewicht wäre nicht zu erwarten.

Im stationären Gleichgewicht stellt sich unabhängig von den Ausbreitungsbedingungen die Stromdichte nach Gleichung (3.95) ein, da die Teilchenzahlerhaltung gewahrt bleiben muß und die injizierten Teilchen nur über die äußere Grenze entweichen können. Bedingt durch die Kontinuitätsgleichung (2.61) ist die Stromdichte räumlich konstant, so daß der g_{1s} -Koeffizient, der nach Gleichung (2.64) proportional zur Stromdichte ist, ebenfalls konstant bleiben muß. Das Erreichen des stationären Zustandes kann daher durch die räumliche Konstanz des g_{1s} -

Koeffizienten oder die zeitliche Konstanz des g_{0s} -Koeffizienten, der nach Gleichung (2.64) proportional zur Teilchendichte ist, überprüft werden. Im Gegensatz zum g_{1s} -Koeffizienten ist der g_{0s} -Koeffizient und damit die Teilchendichte im stationären Zustand stark abhängig von den Ausbreitungsbedingungen. Ist z. B. die Pitchwinkelstreuung im Verhältnis zur Fokussierung stark, so ist die Teilchendichte hoch, da die Teilchen einer räumlich starken Diffusion unterworfen sind und da in einem festen Wegelement der Flußröhre im Vergleich zu einer schwachen Pitchwinkelstreuung relativ viele Teilchen “umherirren”, indem sie ihren *random walk* vollführen. Für die Anisotropie ξ_{1s} erster Ordnung bedeutet dies einen geringen Betrag, da die Anisotropie umgekehrt proportional zum g_{0s} -Koeffizienten ist und der g_{1s} -Koeffizient, wie oben erwähnt, vom Betrag her konstant bleibt.

Ebenfalls von den Ausbreitungsbedingungen stark abhängig ist die Zeitkonstante, mit der das stationäre Gleichgewicht erreicht wird. Ist die Pitchwinkelstreuung im Verhältnis zur Fokussierung schwach, so wird der stationäre Zustand relativ schnell erreicht, da sich die Information über die Ausbreitungsbedingungen relativ schnell entlang der räumlichen Koordinate s ausbreiten kann. So ist z. B. die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit der Information die Ausbreitungsgeschwindigkeit v , die nur durch die Teilchen mit einem Pitchkosinus von $\mu = \pm 1$ erreicht wird. Für den Fall, daß Fokussierung und Pitchwinkelstreuung vollständig fehlen würde sich für einen Beobachter am Ort s_1 die Information einer z. B. reflektierenden Randbedingung nach der Zeitspanne bemerkbar machen, die ein Teilchen braucht, um vom Ort s_1 mit der Geschwindigkeit v zum Rand und wieder zurück zu fliegen. Unterliegt das Teilchen auf seinem Weg noch zusätzlicher Streuung, so würde sich die Art der Randbedingung immer noch am Ort s_1 bemerkbar machen, wäre aber in ihrer Auswirkung erst nach einer größeren Zeitspanne zu erkennen.

Für die quantitative Bestimmung der Ausbreitungszeit t zur Approximation der stationären Lösung ist es vorteilhaft, die bereits durch die Gleichung (2.68) eingeführte “Zeitskala” τ zu verwenden. Diese “Zeitskala” entspricht der von den schnellsten Teilchen zurückgelegten Wegstrecke und ist somit von der Ausbreitungsgeschwindigkeit v und damit von der Energie der Teilchen unabhängig.

In den Abbildungen 3.6 und 3.7 sind zu diesem Zweck die relativen Abweichungen der nach Legendre-Koeffizienten entwickelten PWV zu verschiedenen Zeiten τ von der stationären Lösung aufgetragen. Da die exakten stationären Lösungen nicht bekannt sind, wird für die Abbildung 3.6 die PWV zum Zeitpunkt $\tau = 1996.8$ AU und für die Abbildung 3.7 die PWV zum Zeitpunkt $\tau = 998.4$ AU als näherungsweise stationär angenommen. Die Ausbreitungsbedingungen sind durch eine radial konstante Streuung, eine durch die Archimedische Spirale des Magnetfeldes bestimmte Fokussierungslänge und einen Pitchwinkelstreukoeffizienten mit $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ vorgegeben. Die radiale mittlere freie Weglänge ist für beide Abbildungen bewußt sehr unterschiedlich gewählt worden, damit das Zeitverhalten der PWV in der Abbildung 3.6 für starke Streuung ($\lambda_r = 0.025$ AU) und in der Abbildung 3.7 für schwache Streuung ($\lambda_r = 0.4$ AU) betrachtet werden kann. Zudem sind in jeder Abbildung die PWVs für die radialen Abstände $r = 0.3$ AU (gestrichelte Kurven) und $r = 1$ AU (durchgezogene Kurven) eingetragen. Dabei fällt auf, daß die gestrichelten Kurven fast immer unter den durchgezogenen Kurven liegen, d. h. daß die PWVs für geringe radiale Abstände und somit starke Fokussierung schneller gegen die stationäre Lösung konvergieren als für große radiale Abstände¹⁷. Dies steht in Übereinstimmung mit der oben gemachten Aussage, daß für

¹⁷Die zusätzliche Ausbreitungszeit, die die Teilchen benötigen, um von der Quelle in der Nähe der Sonne

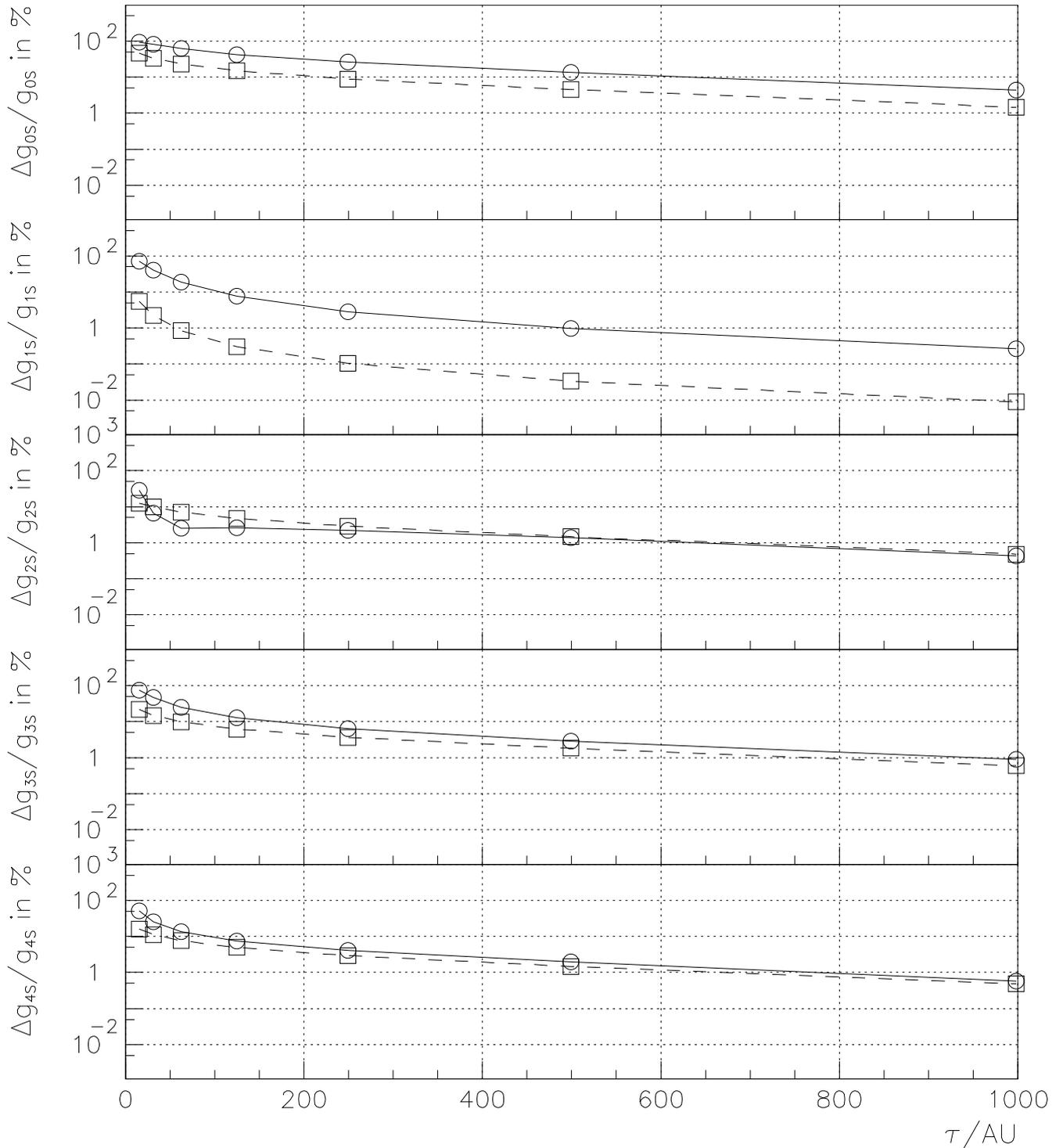


Abbildung 3.6: Die relative Abweichung (in Prozent) der nach Legendre-Koeffizienten entwickelten PWV von der stationären Lösung ist in Abhängigkeit von der Ausbreitungszeit τ aufgetragen. Es wird zwischen einem radialen Abstand von $r = 0.3 \text{ AU}$ (gestrichelte Kurven) und $r = 1 \text{ AU}$ (durchgezogene Kurven) unterschieden. Die Ausbreitungsbedingungen sind durch eine radial konstante Streuung von $\lambda_r = 0.025 \text{ AU}$, eine durch die Archimedische Spirale des Magnetfeldes bestimmte Fokussierungslänge und einen PWSK mit $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ vorgegeben.

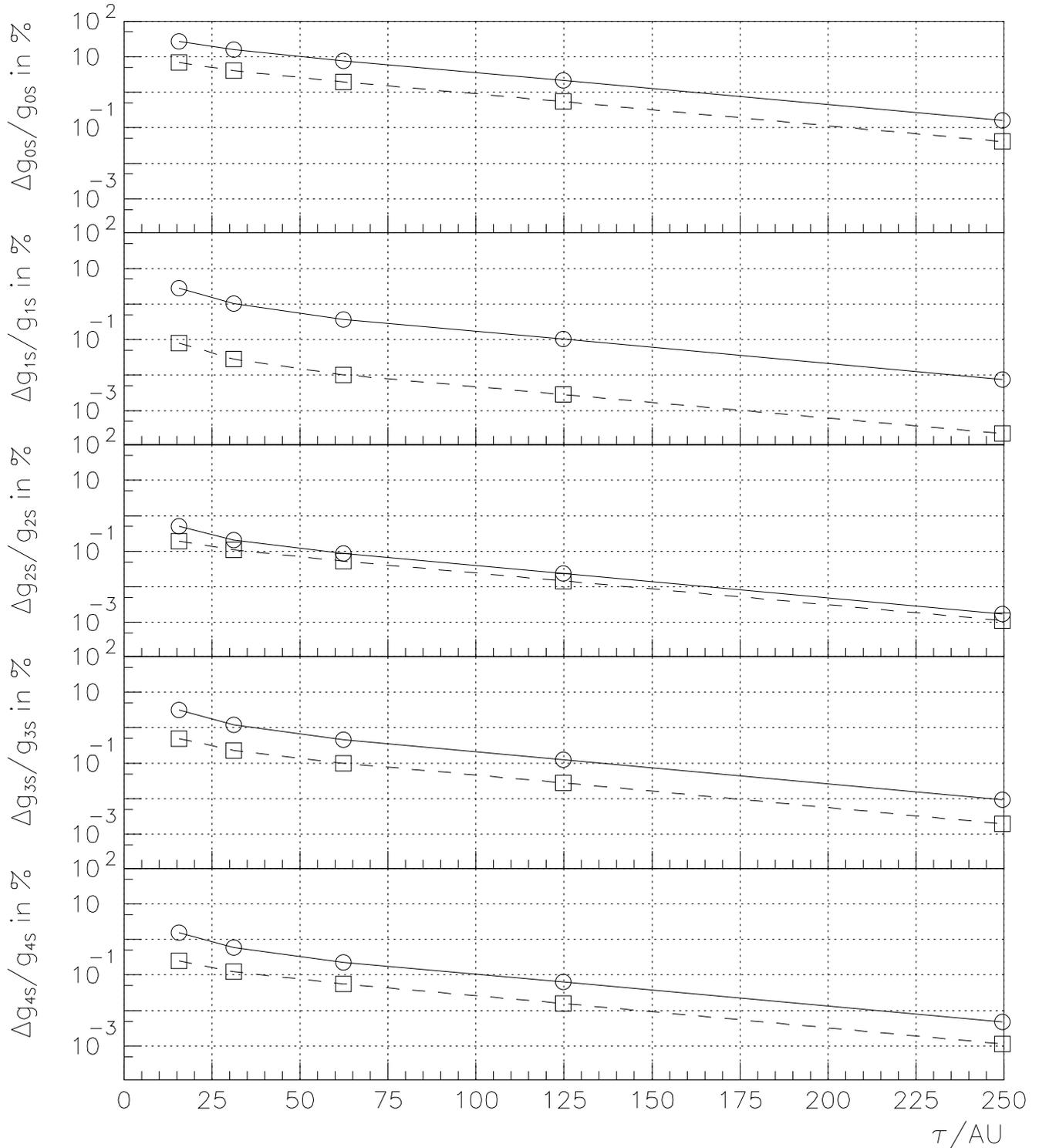


Abbildung 3.7: Die relative Abweichung (in Prozent) der nach Legendre-Koeffizienten entwickelten PWV von der stationären Lösung ist in Abhängigkeit von der Ausbreitungszeit τ aufgetragen. Es wird zwischen einem radialen Abstand von $r = 0.3$ AU (gestrichelte Kurven) und $r = 1$ AU (durchgezogene Kurven) unterschieden. Die Ausbreitungsbedingungen sind durch eine radial konstante Streuung von $\lambda_r = 0.4$ AU, eine durch die Archimedische Spirale des Magnetfeldes bestimmte Fokussierungslänge und einen PWSK mit $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ vorgegeben.

λ_r (AU)	τ_{\max} (AU)	t_{\max} (h)
0.025 – 0.05	748.8	576
0.075	499.2	384
0.1 – 0.2	374.4	288
> 0.2	249.6	192

Tabelle 3.1: Maximale zurückgelegte Wegstrecke τ_{\max} zur Approximation der stationären Lösung in Abhängigkeit von der radialen mittleren freien Weglänge λ_r . Die Ausbreitungszeiten t_{\max} sind für ein $v = 1.3$ AU/h schnelles Proton berechnet worden, was einer Energie von 16 MeV entspricht.

im Verhältnis zur Fokussierung schwache Pitchwinkelstreuung das stationäre Gleichgewicht schneller erreicht wird. Bestätigt wird dies auch, wenn man die Kurven der Abbildung 3.6 für starke Streuung mit denen aus der Abbildung 3.7 für schwache Streuung vergleicht. So wird z. B. für die Legendre-Koeffizienten g_n mit $n \geq 1$ und einer radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.025$ AU die relative Abweichung von 1 % erst nach der Zeit von $\tau \approx 1000$ AU unterschritten. Für die radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU geschieht dies schon nach der Zeit von $\tau \approx 40$ AU. Die Annäherung des Legendre-Koeffizienten g_0 an die stationäre Lösung vollzieht sich im Vergleich zu den Legendre-Koeffizienten g_n mit $n \geq 1$ noch langsamer.

Betrachtet man die relative Abweichung der PWV von der stationären Lösung in dem hier verwendeten halblogarithmischen Maßstab, so ist zu erkennen, daß diese für sehr große τ einen linearen Verlauf annimmt. Die Konvergenz gegen die stationäre Lösung scheint somit proportional zu $\exp(-1/\tau)$ zu verlaufen.

Als Folge der unterschiedlich schnellen Konvergenz gegen die stationäre Lösung in Abhängigkeit von der radialen mittleren freien Weglänge λ_r werden bei den in dieser Arbeit berechneten stationären Lösungen unterschiedlich lange Ausbreitungszeiten τ_{\max} verwendet, die in Tabelle 3.1 aufgelistet sind. Um eine Anschauung zu vermitteln, welcher tatsächlichen Ausbreitungszeit t_{\max} die hier zurückgelegten Strecken τ_{\max} entsprechen, sind in Tabelle 3.1 zusätzlich die Ausbreitungszeiten t_{\max} für ein $v = 1.3$ AU/h schnelles Proton aufgeführt, was einer Energie von 16 MeV entspricht.

Zudem muß noch darauf hingewiesen werden, daß die Approximation der stationären Lösung und der damit verbundenen langen Ausbreitungszeiten für kleine und mittelgroße radiale mittlere freie Weglängen in diesem Abschnitt als rein mathematisches Problem betrachtet wird. Betrachtet man Meßreihen von PWVs über solch lange Zeitintervalle, so stammen die PWVs zum einen nicht über die gesamte Zeitdauer aus derselben Flußröhre und zum anderen ändern sich im allgemeinen die Ausbreitungsbedingungen selbst in einer speziellen Flußröhre (siehe Abschnitt 6.1). Die durch Anwendung des steady-state-Theorems aus Abschnitt 2.2.3 ermittelten stationären Lösungen können somit deutlich von den hier rein mathematisch berechneten stationären Lösungen abweichen.

Wegen der großen Ausbreitungszeiten zur Approximation der stationären Lösung ist es

zum Beobachtungsort (in der inneren Heliosphäre) zu gelangen, kann bei den hier betrachteten energiereichen Teilchen vernachlässigt werden. Im allgemeinen sollte der radiale Abstand zur Sonne jedoch von der Ausbreitungszeit τ abgezogen werden.

verständlich, daß das Differenzenverfahren möglichst schnell sein sollte, um die Rechenzeit auf zumutbare Werte zu beschränken. Es stellt sich daher die Frage, ob es Möglichkeiten gibt, die stationäre Lösung noch effizienter zu berechnen. Da sich die zeitabhängige Lösung bei der Annäherung an den stationären Zustand pro Zeitschritt immer geringfügiger ändert, bietet es sich an, im gleichen Maße den Zeitschritt zu vergrößern. Man könnte daher eine Selbstanpassung des Zeitschrittes an die Veränderung der Lösung pro Zeitschritt vornehmen. Leider ist bei dem hier vorgestellten Differenzenverfahren der Zeitschritt $\Delta\tau$ durch die CFL-Stabilitätsbedingung (3.4) an die räumliche Gitterauflösung Δs gekoppelt, so daß eine Vergrößerung des Zeitschrittes mit einer unerwünschten Verschlechterung der räumlichen Auflösung verbunden ist. Damit ist diese Möglichkeit der Optimierung ausgeschlossen.

3.4 Test des Computerprogramms GREF

Das im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Differenzenverfahren ist im Computerprogramm GREF umgesetzt worden. Dabei konnte ich auf das ursprünglich von NG AND WONG [1979] und WONG [1982] entwickelte Programm zurückgreifen, das von SCHLÜTER [1985] weiterentwickelt worden ist. Die von SCHLÜTER [1985] vorgenommenen Veränderungen und Erweiterungen beziehen sich auf die Struktur des GREF-Programms, nicht aber auf das zugrundeliegende Differenzenverfahren, so daß im weiteren Verlauf von dem Differenzenverfahren von WONG [1982] gesprochen wird.

Zwischen dem von WONG [1982] und dem in dieser Arbeit beschriebenen Differenzenverfahren gibt es im wesentlichen folgende Unterschiede:

1. Während beide Differenzenverfahren im s -Transport mit dem FCT arbeiten, ist bei WONG [1982] der Zeitschritt nur durch die CFL-Stabilitätsbedingung (3.4) beschränkt. Der in dieser Arbeit gewählte s -Transport ist für die Gitterpunkte μ_0 und μ_{I-1} exakt, wodurch sich der größtmögliche Zeitschritt ergibt, der mit der CFL-Stabilitätsbedingung in Einklang gebracht werden kann. So wird zum einen verhindert, daß sich die Teilchen, bedingt durch Diskretisierungsfehler, mit einer Geschwindigkeit fortbewegen, die über der vorgegebenen Ausbreitungsgeschwindigkeit v liegt. Dies ist besonders dann wichtig, wenn aus der Ankunft der ersten Teilchen beim Beobachter auf den genauen Zeitpunkt des Beginns der Injektion in der Nähe der Sonne geschlossen werden soll (siehe KALLENRODE [1989], S. 118ff.). Zum anderen nehmen die γ_i aus der Gleichung (3.3) ebenfalls die größtmöglichen Werte an, wodurch das in der Abbildung 3.2 dargestellte Approximationsproblem des FCT für kleine γ_i minimiert wird. Erst dies rechtfertigt es, für den s -Transport weiterhin den FCT und nicht das robustere aber rechenintensivere Fluxlimiter-Verfahren zu verwenden.
2. Das Differenzenverfahren von WONG [1982] ist nicht speziell an das Konvektions-Diffusions-Problem des μ -Transportes angepaßt, wie es durch das in dieser Arbeit vorgestellte Π 'in-Schema geschieht. Daraus folgt eine schlechtere Approximation für den Fall schwacher Streuung im Verhältnis zur Fokussierung. Dies ist sowohl bei einer großen mittleren freien Weglänge der Fall — besonders in der Nähe der Sonne, wo die Fokussierung ohnehin dominiert —, als auch bei einem ausgeprägten "resonance gap" im PWSK, da auch hier die Streuung im Verhältnis zur Fokussierung gering ist. Desweiteren ist der μ -Transport nicht in besonderer Weise an den Verlauf des PWSK angepaßt, wie es durch die Gleichung (3.66) bei dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren geschieht.

3. Das Aufspaltungsschema von WONG [1982], dargestellt durch die Gleichung (3.85), entspricht nicht dem in dieser Arbeit verwendeten Aufspaltungsschema (siehe Gleichung (3.86)). Durch die Festlegung auf eine bestimmte Reihenfolge bei der Berechnung des s - und des μ -Transportes ergibt sich bei WONG [1982] ein Approximationsfehler von linearer Ordnung in der Zeit. Dies macht sich besonders bei starker Pitchwinkelstreuung bemerkbar, wie in der Abbildung 3.4 gezeigt wird.

Die Umsetzung des in dieser Arbeit vorgestellten Differenzenverfahrens in das GREF-Programm macht es notwendig, beim Programmiervorgang nicht auszuschließende Programmierfehler aufzuspüren. Zu diesem Zweck ist es unabdingbar, die numerischen Lösungen anhand von analytischen Lösungen für Spezialfälle der Transportgleichung (siehe Abschnitt 2.2) zu überprüfen. Außerdem kann auf diese Weise die Feinheit des äquidistanten Gitters bestimmt werden, die immer als Kompromiß zwischen Rechenaufwand und gewünschter Approximationsgenauigkeit aufzufassen ist.

3.4.1 Test anhand von Spezialfällen der Transportgleichung

Wie schon in Abschnitt 3.2.1.1 erwähnt, kann der s -Transport durch die Wahl von speziellen Anfangsbedingungen, die z. B. einem Rechteckimpuls (Rechteckwelle) entsprechen, überprüft werden. Für die räumliche und zeitliche Schrittweite von $\Delta s = 0.01$ AU und $\Delta \tau = 0.01026$ AU ergeben sich zufriedenstellende Ergebnisse, so daß auch starke räumliche Gradienten fast vollständig erhalten bleiben. Im einzelnen ist die Approximationsgenauigkeit vom Pitchkosinus μ des Advektionsterms abhängig, da der s -Transport für μ_{\max} exakt ist und für den vom Betrag her kleinsten Pitchkosinus μ_i die größte Ungenauigkeit aufweist.

Eine Überprüfung des μ -Transportes läßt sich am besten mit der stationären Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen durchführen, wobei sich die zu lösende PDGl im stationären Gleichgewicht auf folgende Gleichung reduziert:

$$\frac{1}{2L} \frac{\partial}{\partial \mu} ((1 - \mu^2)\zeta) - \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\bar{\kappa}(\mu) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right) = 0 \quad (3.96)$$

Die korrekte Diskretisierung in der Zeit τ und im Ort s läßt sich auf diese Weise nur indirekt überprüfen, da im stationären Gleichgewicht keine Veränderung mehr in der Zeit erfolgt und es wegen der konstanten Ausbreitungsbedingungen (siehe Gleichung (2.65)) keinen räumlichen Gradienten gibt. Das Konvergieren gegen die korrekte stationäre Lösung, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, ist aber zumindest ein Hinweis darauf, daß sowohl die zeitliche als auch die räumliche Diskretisierung einwandfrei erfolgt sind.

In Abbildung 3.8 sind die relativen Fehler (in Prozent) der berechneten stationären Lösungen für konstante Ausbreitungsbedingungen im logarithmischen Maßstab auf der Ordinate aufgetragen. Auf der Abzisse ist hingegen die Anzahl der bei der Berechnung der numerischen Lösung verwendeten Gitterpunkte I aufgetragen, so daß dies wegen $I \propto 1/\Delta\mu$ einem logarithmischen Maßstab in $\Delta\mu$ entspricht. Die Anzahl der Gitterpunkte verdoppelt sich von 20 auf 40, während sich $\Delta\mu$ entsprechend halbiert.

Für die konstanten Ausbreitungsbedingungen wurden die Parameter $\lambda_{\parallel}/L = 1$, $\hat{q} = 1.5$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ gewählt. Der Wert $\hat{q} = 1.5$ bietet sich an, da sich zum einen die Legendre-Koeffizienten g_{ns} und damit die Anisotropien ξ_{ns} analytisch berechnen lassen und zum anderen ein ausgeprägtes "resonance gap" vorliegt, so daß der Vergleich mit realistischen Ausbreitungsbedingungen durchgeführt wird.

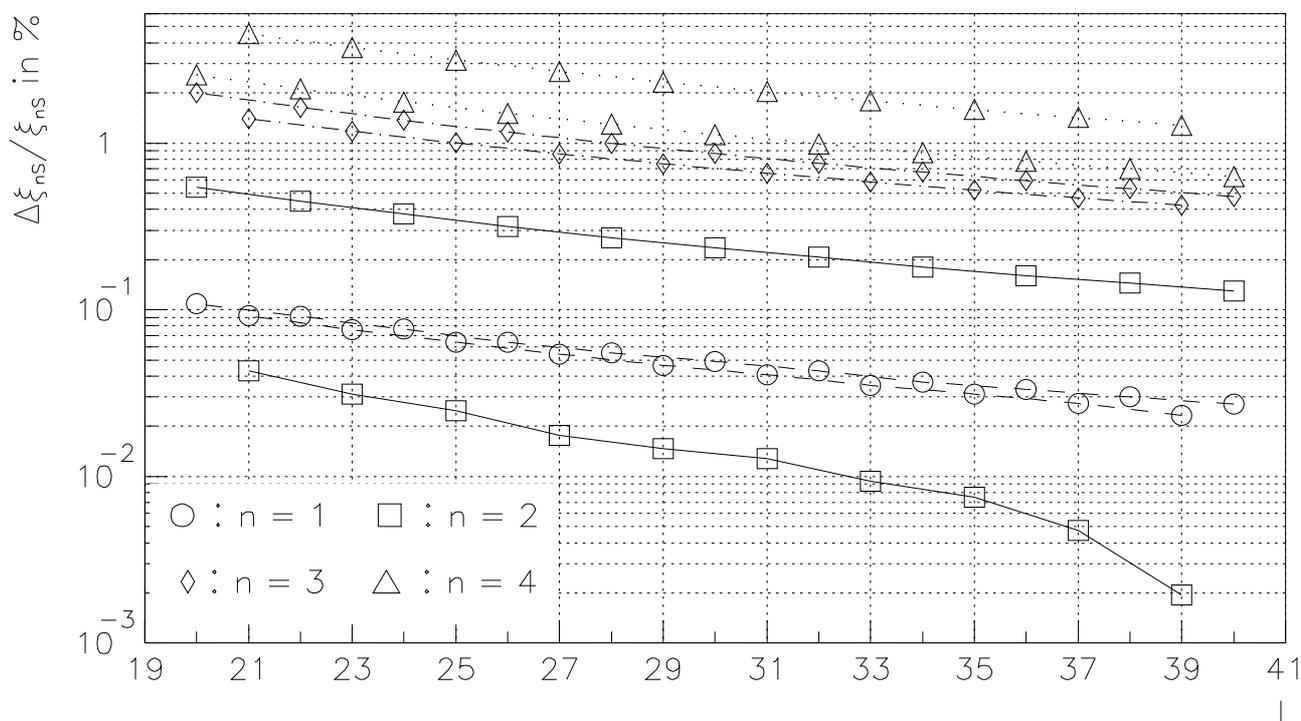


Abbildung 3.8: Die relativen Fehler der stationären Anisotropien ξ_{ns} (in Prozent) sind für die ersten vier Ordnungen, d. h. $n = 1, 2, 3, 4$, in Abhängigkeit von der Anzahl der verwendeten Gitterpunkte I des μ -Gitters aufgetragen. Es sind jeweils die relativen Fehler der Berechnungen mit einer geraden bzw. einer ungeraden Anzahl von Gitterpunkten miteinander verbunden.

Da die relativen Abweichungen deutlich davon abhängen, ob die Anzahl der verwendeten Gitterpunkte gerade oder ungerade ist, sind jeweils die Werte für gerade und ungerade Gitterpunkte miteinander verbunden worden. Es ergeben sich somit für die hier vorgestellten ersten vier Ordnungen der Anisotropien acht Kurven, die bis auf die unterste Kurve einen linearen Funktionsverlauf aufweisen. An diesem linearen Funktionsverlauf läßt sich wegen des doppeltlogarithmischen Maßstabs unmittelbar ablesen, daß der relative Fehler der berechneten Anisotropie ξ_{ns} mit kleiner werdenden $\Delta\mu$ quadratisch abnimmt. Nach der Ungleichung (3.1) entspricht dies trotz der geringen Pitchwinkelstreuung, die sich im Verhältnis $\lambda_{\parallel}/L = 1$ ausdrückt, eine Konvergenzordnung von zwei in μ .

Betrachtet man den Betrag der relativen Fehler, so wird deutlich, daß dieser mit der Ordnung der Anisotropie ansteigt. Dies ist plausibel, da die höheren Ordnungen eine größere Variabilität in μ aufweisen und damit empfindlicher auf das diskrete Raster der Gitterpunkte reagieren.

Der größte relative Fehler wird somit durch die Anisotropie vierter Ordnung bestimmt. Da die relativen Fehler der Anisotropie vierter Ordnung für eine gerade Anzahl von Gitterpunkten systematisch geringer ausfallen, ist eine gerade Anzahl von Gitterpunkten bei der Berechnung der numerischen Lösung vorzuziehen. Für die Anzahl I der verwendeten Gitterpunkte stellt $I = 40$ und damit $\Delta\mu = 0.05$ einen guten Kompromiß zwischen Approximationsgenau-

	$\lambda_{\parallel}/L = 1, \hat{q} = 1.5, H = 0, \hat{\sigma} = 0.4$			$\lambda_{\parallel}/L = 1, \hat{q} = 2, H = 0.05, \hat{\sigma} = 0$		
	analytisch	numerisch	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %	analytisch	numerisch	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %
ξ_{1s}	0.9642903	0.9639151	0.0389	0.9136761	0.9133790	0.0325
ξ_{2s}	0.3529805	0.3520556	0.2620	0.1655341	0.1652580	0.1668
ξ_{3s}	-0.1466538	-0.1473653	0.4851	-0.2769929	-0.2781976	0.4349
ξ_{4s}	-0.1099753	-0.1102772	0.2745	-0.0742426	-0.0748775	0.8551

Tabelle 3.2: Analytisch und numerisch berechnete stationäre Anisotropien ξ_{ns} für die Ausbreitungsbedingungen $\lambda_{\parallel}/L = 1, q = 1.5, H = 0, \hat{\sigma} = 0.4$ und $\lambda_{\parallel}/L = 1, q = 2, H = 0.05, \hat{\sigma} = 0$, wobei die numerischen Berechnungen mit einem μ -Gitter von $I = 40$ Gitterpunkten erfolgte. Es wird jeweils der relative Fehler der Anisotropien in Prozent angegeben.

igkeit und Rechenaufwand dar. Die relativen Fehler der Anisotropien liegen dann unter der oberen Schranke von 0.7 % und sind damit wesentlich geringer als die systematischen und statistischen Fehler der gemessenen Anisotropien. Werden Ausbreitungsbedingungen gewählt mit $\lambda_{\parallel}/L > 1$ und/oder $\hat{q} > 1.5, H = 0$, so steigt der relative Fehler weiter an, bleibt aber für die Auswertung von Meßdaten, wie sich im weiteren Verlauf der Arbeit vorgestellt wird, unkritisch. Eine weitere Verfeinerung des μ -Gitters verringert mit jedem zusätzlichen Gitterpunkt den relativen Fehler im Verhältnis immer weniger, da für die Anzahl der Gitterpunkte gilt: $I = 2/\Delta\mu$. Außerdem wächst der Fehler in der verkürzten Gaußelimination quadratisch mit der Anzahl der μ -Gitterpunkte (siehe SAMARSKIJ [1984], S. 38), so daß die Darstellungsgenauigkeit der Variablen von *single precision* auf *double precision* erhöht werden muß, wodurch der Rechenaufwand steigt.

Bei der untersten Kurve in Abbildung 3.8 sind die Auswirkungen der begrenzten Darstellungsgenauigkeit der Zahlen im Rechner bereits zu erkennen, da der relative Fehler der Anisotropie zweiter Ordnung für eine ungerade Anzahl von Gitterpunkten so klein wird, daß die maschineninternen Rundungsfehler zum Tragen kommen.

Neben der Anzahl der Gitterpunkte, die durch die vorhandene Rechnerkapazität begrenzt ist, ist der Wert der Konstanten C aus der Ungleichung (3.1) für die Approximationsgenauigkeit der Lösung von entscheidender Bedeutung, wie man am Versatz der Kurven gegeneinander in Abbildung 3.8 erkennen kann.

Die hervorragenden Approximationseigenschaften des μ -Transportes sind an einer ganzen Reihe von Lösungen der stationären Transportgleichung für konstante Ausbreitungsbedingungen überprüft worden. Als eine Auswahl der in Anhang A aufgeführten Lösungen sind in der Tabelle 3.2 die analytisch und numerisch berechneten Anisotropien ξ_{ns} zusammen mit den relativen Fehlern der numerisch berechneten Anisotropien für die Ausbreitungsbedingungen $\lambda_{\parallel}/L = 1, \hat{q} = 1.5, H = 0, \hat{\sigma} = 0.4$ und $\lambda_{\parallel}/L = 1, \hat{q} = 2, H = 0.05, \hat{\sigma} = 0$ aufgelistet. Die numerischen Lösungen wurden mit einem μ -Gitter von $I = 40$ Gitterpunkten berechnet.

3.4.2 Überprüfung der Gültigkeit des steady-state-Theorems

Zur Überprüfung der korrekten zeitlichen Approximation der Transportgleichung eignet sich das steady-state-Theorem aus Abschnitt 2.2.3. Die Gültigkeit des steady-state-Theorems für die exakte Lösung der Transportgleichung ist eine Eigenschaft, die auch für die numerisch be-

rechnete Lösung gelten muß. Besonders hohe Anforderungen werden dabei an das numerische Verfahren für eine δ -Injektion in der Zeit gestellt. Für das diskrete zeitliche Raster bedeutet dies, daß die Injektion nur während eines einzigen Zeitschrittes erfolgt. Die damit verbundenen räumlichen und zeitlichen Veränderungen der Lösung sind sehr groß, so daß die Auflösung des räumlichen und zeitlichen Rasters hinreichend fein gewählt werden muß. Im folgenden soll überprüft werden, ob die räumliche und zeitliche Schrittweite von $\Delta s = 0.01$ AU und $\Delta \tau = 0.01026$ AU ausreichend ist, um die Gültigkeit des steady-state-Theorems zu gewährleisten.

Von besonderem Interesse ist dabei der Bereich, der von den radialen Abständen $r = 0.3$ AU und $r = 1$ AU begrenzt wird, da dies den inneren bzw. äußeren Begrenzungen der Flugbahnen der HELIOS-Satelliten entspricht. Die Auswertung der Meßdaten des E6-Experiments an Bord der HELIOS-Satelliten erfordert speziell in diesem Bereich zuverlässige numerische Lösungen. Desweiteren ist es angebracht, die Gültigkeit des steady-state-Theorems sowohl für starke Pitchwinkelstreuung, wie z. B. $\lambda_r = 0.1$ AU, als auch für schwache Pitchwinkelstreuung, wie z. B. $\lambda_r = 0.4$ AU, zu überprüfen. Für die Form des PWSK soll $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ angenommen werden, um den Fall eines ausgeprägten "resonance gap" einzuschließen. In der Tabelle 3.3 sind die stationären Anisotropien ξ_{ns} für die ersten vier Ordnungen aufgelistet. Eine Darstellung der stationären Anisotropien für $\lambda_r = 0.1$ AU erfolgt im oberen Teil der Tabelle, während im unteren Teil die stationären Anisotropien für $\lambda_r = 0.4$ AU aufgelistet sind. Es wird dabei unterschieden zwischen den stationären Anisotropien, wie sie nach Abschnitt 3.3 berechnet werden und den Anisotropien, wie sie sich aus der Anwendung des steady-state-Theorems ergeben. Die Summation bei der Anwendung des steady-state-Theorems erfolgt bis zu demselben Zeitpunkt, der als Ausbreitungszeit zur Approximation der stationären Lösung verwendet wird. Aus Abschnitt 3.3 ergibt sich somit für $\lambda_r = 0.1$ AU eine Summationszeit von $\tau_{\max} = 374.4$ AU und für $\lambda_r = 0.4$ AU eine Summationszeit von $\tau_{\max} = 249.6$ AU. Zum besseren Vergleich der durch Anwendung des steady-state-Theorems gewonnenen stationären Anisotropien mit den direkt berechneten stationären Anisotropien ist die relative Abweichung beider Werte als zusätzliche Spalte in die Tabelle 3.3 aufgenommen worden. Die relative Abweichung beträgt maximal 1 %, womit gezeigt ist, daß das steady-state-Theorem seine Gültigkeit für die in Tabelle 3.3 aufgelisteten numerischen Lösungen in guter Näherung beibehält.

Vergleicht man die relativen Abweichungen für den radialen Abstand von $r = 0.3$ AU (linke Hälfte der Tabelle 3.3) mit denen für einen radialen Abstand von $r = 1$ AU (rechte Hälfte der Tabelle 3.3), erkennt man deutlich, daß die relativen Abweichungen für $r = 0.3$ AU größer sind. Der Grund hierfür ist die sich in der Nähe der Sonne auf kleinen zeitlichen Skalen verändernde Lösung, die durch die vom Betrag her große und räumlich stark variable Fokussierungslänge geprägt ist, so daß sich das diskrete räumliche Raster in diesem Bereich bemerkbar macht. Eine weitere Verfeinerung des zeitlichen Gitters reduziert zwar die relative Abweichung, ist jedoch mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden, da der Zeitschritt $\Delta \tau$ durch die CFL-Stabilitätsbedingung (3.4) an die räumliche Gitterweite Δs gekoppelt ist. So muß z. B. bei einer Halbierung der zeitlichen Gitterweite eine Vervierfachung des Rechenaufwandes bewältigt werden. Angesichts der Tatsache, daß die numerischen Lösungen der Datenauswertung des E6-Experiments dienen sollen, die mit einem gewissen statistischen Fehler behaftet sind, und angesichts des hinzukommenden systematischen Fehlers durch die vereinfachten Modellannahmen der Teilchenausbreitung ist die hier erzielte Übereinstimmung der stationären Anisotropien vollkommen ausreichend. Sollte jedoch die

$\lambda_r = 0.1 \text{ AU}, \hat{q} = 1.6, H = 0, \hat{\sigma} = 0$						
	$r = 0.3 \text{ AU} (s = 0.31 \text{ AU})$			$r = 1 \text{ AU} (s = 1.17 \text{ AU})$		
	stationär	Theorem	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %	stationär	Theorem	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %
ξ_{1s}	0.3538345	0.3536240	0.060	0.1751831	0.1751850	0.001
ξ_{2s}	0.0455107	0.0453579	0.336	0.0070815	0.0070817	0.002
ξ_{3s}	-0.1117940	-0.1121710	0.337	-0.0560595	-0.0560600	0.001
ξ_{4s}	-0.0162063	-0.0163797	1.070	-0.0026450	-0.0026444	0.022

$\lambda_r = 0.4 \text{ AU}, \hat{q} = 1.6, H = 0, \hat{\sigma} = 0$						
	$r = 0.3 \text{ AU} (s = 0.31 \text{ AU})$			$r = 1 \text{ AU} (s = 1.17 \text{ AU})$		
	stationär	Theorem	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %	stationär	Theorem	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %
ξ_{1s}	1.245782	1.245530	0.020	0.643545	0.643545	0.000
ξ_{2s}	0.582423	0.582071	0.061	0.102809	0.102810	0.000
ξ_{3s}	-0.122350	-0.122670	0.261	-0.188589	-0.188589	0.000
ξ_{4s}	-0.133080	-0.133229	0.111	-0.036701	-0.036700	0.003

Tabelle 3.3: Die nach Abschnitt 3.3 berechneten stationären Anisotropien und die durch die Anwendung des steady-state-Theorems aus Abschnitt 2.2.3 berechneten Anisotropien sind zusammen mit der relativen Abweichung voneinander aufgelistet. Den in der oberen Hälfte der Tabelle aufgeführten Werten liegt eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.1 \text{ AU}$ und ein PWSK mit $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ zugrunde. Die Werte in der unteren Hälfte der Tabelle sind hingegen für $\lambda_r = 0.4 \text{ AU}$ berechnet worden. Zusätzlich wird noch zwischen einem radialen Abstand von $r = 0.3 \text{ AU}$ (linke Hälfte) und $r = 1 \text{ AU}$ (rechte Hälfte) unterschieden.

Datenauswertung eines zukünftigen Experiments auf radiale Abstände mit $r < 0.3 \text{ AU}$ ausgedehnt oder ein quantitativer Vergleich mit analytischen Näherungslösungen vorgenommen werden, so ist das räumliche und damit auch das zeitliche Gitter weiter zu verfeinern.

Die in der rechten Hälfte der Tabelle 3.3 aufgelisteten relativen Abweichungen der stationären Lösungen für einen radialen Abstand von $r = 1 \text{ AU}$ sind bereits äußerst gering ($< 0.03 \%$). Dies liegt zum einen an den sich räumlich nur noch geringfügig ändernden Ausbreitungsbedingungen, zum anderen aber auch an der im Verhältnis zur Diffusion größer werdenden Fokussierungslänge, so daß sich insgesamt die Lösungen räumlich und zeitlich weniger stark ändern.

Es kann daher davon ausgegangen werden, daß die numerischen Lösungen, die mit einem räumlichen Gitterabstand von $\Delta s = 0.01 \text{ AU}$ und einem daraus folgenden zeitlichen Gitterabstand von $\Delta \tau = 0.01026 \text{ AU}$ mit dem GREF-Programm berechnet werden, für größere radiale Abstände, wie z. B. $r = 1 \text{ AU}$, die exakten Lösungen sehr gut approximieren.

3.4.3 Überprüfung durch ein weiteres Differenzenverfahren

Die bisher vorgestellten Tests des GREF-Programms beruhten zum einen auf Spezialfällen der Transportgleichung, für die analytische Lösungen angegeben werden können, und zum anderen auf der Überprüfung der Gültigkeit des steady-state-Theorems. Ein direkter Ver-

gleich der numerischen Lösungen für allgemeine Ausbreitungsbedingungen ist nur mit den numerischen Lösungen eines weiteren, möglichst unabhängig entwickelten Differenzenverfahrens durchzuführen. Betrachtet man die Veröffentlichungen in den letzten Jahren, die sich mit der numerischen Lösung der Transportgleichung beschäftigen, so ist die Arbeit von RUFFOLO [1991] hervorzuheben. Im Gegensatz zu anderen Autoren ist das von ihm entwickelte Differenzenverfahren nicht auf eine räumlich konstante Fokussierungslänge angewiesen, sondern berücksichtigt die durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes vorgegebene räumliche Abhängigkeit der Fokussierungslänge.

Das Differenzenverfahren von RUFFOLO [1991] orientiert sich, genau wie das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren, an der Arbeit von NG AND WONG [1979], weist aber dennoch drei wesentliche Unterschiede auf:

1. Der räumliche Transport ist exakt, wie in Abschnitt 3.2.1.1 beschrieben wird, so daß kein räumlicher Diskretisierungsfehler auftritt. Ein Nachteil ist die Kopplung des räumlichen Schrittes Δs an die Gitterweite $\Delta\mu$ des μ -Transportes, wodurch sehr feine räumliche Gitterweiten gewählt werden müssen. Das Differenzenverfahren ist dadurch, verglichen mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Differenzenverfahren, um den Faktor $[I/2]$ langsamer, wobei I die Anzahl der Gitterpunkte des μ -Gitters mit einem typischen Wert von $I = 40$ darstellt. Mit dem exakten s-Transport ist somit im Regelfall eine um den Faktor 20 größere Laufzeit verbunden. Dabei ist zu überlegen, ob dieser Mehraufwand an Rechenzeit nicht besser genutzt werden kann, indem der zeitliche Schritt $\Delta\tau$ weiter verfeinert wird, um so den zeitlichen Diskretisierungsfehler zu verringern. Der gesamte Diskretisierungsfehler setzt sich aus den Anteilen des räumlichen und des zeitlichen Diskretisierungsfehlers zusammen, so daß eine Minimierung des Gesamtfehlers bei vorgegebenem Rechenaufwand immer mit einer Reduzierung sowohl des räumlichen als auch des zeitlichen Fehlers verbunden ist. Anders ist die Situation hingegen, wenn der räumliche Diskretisierungsfehler für spezielle Untersuchungen ausgeschlossen werden soll.
2. Der μ -Transport setzt sich aus einer Abfolge von impliziten und expliziten Rechenschritten zusammen. Die Anzahl der n impliziten und n expliziten Zwischenschritte wird in einem iterativen Prozeß ermittelt, indem die Anzahl n der Zwischenschritte sukzessiv verdoppelt wird, so daß sich die Folge $n = 1, 2, 4, 8, \dots$ ergibt. Mit der Erhöhung der Anzahl n ist eine Verfeinerung des Zwischenzeitschrittes $\Delta\tilde{\tau} = n \cdot \Delta\tau/2$ verbunden, so daß sich die PWV schließlich im Verhältnis zur weiteren Verfeinerung des Zwischenzeitschrittes nur noch geringfügig ändert. Durch Setzen einer Toleranzgrenze dieser Veränderung kann der iterative Prozeß zum Abbruch gebracht werden. Da zumindest ein Vergleich stattfindet, stellt sich im günstigsten Fall der Wert $n = 2$ ein. Vorteil dieses Verfahrens ist die Anpassung des Zwischenzeitschrittes im μ -Transport an die gegebenen Anfangs- und Ausbreitungsbedingungen. So wird eine angemessene Dämpfung der hochfrequenten Anteile der Lösung im Verlauf der Zeit gewährleistet, ohne daß negative Phasenraumdichten auftreten können (siehe Abschnitt 3.2.2). Durch die Abfolge von impliziten und expliziten Rechenschritten wird, ähnlich wie bei dem Crank-Nicholson-Schema, die Konvergenzordnung in der Zeit erhöht. Nachteilig wirkt sich der enorme Rechenaufwand aus, der betrieben werden muß, um zunächst die Anzahl n der notwendigen Zeitschritte zu bestimmen. Die mit dem sehr feinen Zwischenzeitschritt $\Delta\tilde{\tau}$

durchgeführte Berechnung ist zwar sehr genau, wirft aber wie schon unter 1. die Frage auf, ob der damit verbundene Rechenaufwand nicht besser zur Verringerung des gesamten Zeitschrittes $\Delta\tau$ verwendet werden sollte.

3. Die Umsetzung des Differenzenverfahrens in ein lauffähiges Computerprogramm erfolgt durch die Programmiersprache C und nicht in FORTRAN wie beim GREF-Programm. Die Darstellungsgenauigkeit der Variablen ist dabei durch double precision festgelegt (private Mitteilung von RUFFOLO vom 10. Mai 1996).

Abschließend kann gesagt werden, daß das Differenzenverfahren von RUFFOLO [1991] für ein festgelegtes zeitliches Gitter genauer ist als das in dieser Arbeit vorgestellte Differenzenverfahren. Dieser Gewinn an Approximationsgenauigkeit wird jedoch mit einem unverhältnismäßig hohen Rechenaufwand erreicht. Dies erweist sich besonders dann als Nachteil, wenn eine große Anzahl von numerischen Lösungen für unterschiedliche Ausbreitungsbedingungen im Rahmen der Datenauswertung berechnet werden muß.

Die für den Vergleich verwendeten Gitterabstände sowie Anfangs- und Randbedingungen weichen etwas von den in dieser Arbeit verwendeten Werten ab und werden daher im folgenden aufgelistet:

1. Die Anzahl der μ -Gitterpunkte beträgt für beide Differenzenverfahren $I = 35$, so daß sich eine Gitterweite von $\Delta\mu = 0.0572$ ergibt. Wegen des unterschiedlichen s -Transportes ist eine identische Wahl des räumlichen und zeitlichen Gitters nicht möglich. Um dennoch ähnliche Approximationsbedingungen für beide Verfahren zu erhalten, wird der gleiche zeitliche Gitterabstand von $\Delta t = 0.01$ h gewählt. Für das Verfahren von RUFFOLO [1991] ergibt sich somit bei einer Teilchengeschwindigkeit von $v = 1.4$ AU/h ein räumlicher Gitterabstand von $\Delta s = 0.0008$ AU, während für das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren ein räumlicher Gitterabstand von $\Delta s = 0.0136$ AU folgt.
2. Die innere Grenze befindet sich bei einem radialen Abstand von $r = 0.01$ AU und wird als reflektierend angenommen. Die äußere Grenze hat keinen Einfluß auf die berechneten PWVs, da der Abstand zum Beobachtungsort hinreichend weit entfernt gewählt wird.
3. Die Teilchen werden an der inneren Grenze, d. h. bei $r = 0.01$ AU, in einer sowohl in der Zeit als auch im Pitchwinkel δ -förmigen Injektionsfunktion injiziert. Für das diskrete Raster bedeutet dies, daß die Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ während eines Zeitschrittes in den höchsten Pitchwinkelgitterpunkten injiziert werden.
4. Durch die Annahme einer Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 400$ km/s, einer heliographischen Breite von $\theta = 90^\circ$ und einer mittleren siderischen Winkelgeschwindigkeit der Sonne von $\omega = 0.0105$ rad/h ergibt sich der Wert $\beta = -1.095$ AU $^{-1}$. Der radiale Verlauf der Fokussierungslänge folgt aus dem interplanetaren Magnetfeld in Form einer Archimedischen Spirale.
5. Die Form des PWSK wird durch die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ festgelegt. Die radiale mittlere freie Weglänge λ_r wird als konstant angenommen.

Zum Vergleich der absoluten Werte des g_0 -Koeffizienten wird folgende Normierung der PWV vorgenommen:

$$\tilde{C} \cdot \int_{\mu=-1}^{\mu=+1} \int_{s=s_a}^{s=s_b} \zeta(t=t_0, s, \mu) ds d\mu = C \cdot \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^J \zeta(\tau^0, s_j, \mu_i) \Delta s \Delta \mu \stackrel{!}{=} 1 \quad (3.97)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\zeta(\tau^0, s_0, \mu_{I-1}) \Delta s \Delta \mu} \quad (3.98)$$

Die numerischen Lösungen beider Verfahren sind exemplarisch für $r = 1$ AU für die radiale mittlere freie Weglänge $\lambda_r = 0.1$ AU in der Abbildung 3.9 bzw. die radiale mittlere freie Weglänge $\lambda_r = 0.4$ AU in der Abbildung 3.10 dargestellt. Die Ergebnisse des Differenzenverfahrens von RUFFOLO [1991] werden durch durchgezogene Kurven dargestellt, während die Ergebnisse des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens durch gestrichelte Kurven dargestellt werden. Für die radiale mittlere freie Weglänge $\lambda_r = 0.4$ AU in der Abbildung 3.10 ergibt sich eine perfekte Übereinstimmung der zeitlichen Verläufe sowohl der omnidirektionalen Intensität g_0 als auch der Anisotropien ξ_n , die bis zur vierten Ordnung dargestellt sind. Betrachtet man die Abbildung 3.9 mit einer radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.1$ AU, so zeigen sich geringe Unterschiede in der Anfangsphase der PWV. Dies liegt zum einen an dem exakten s -Transport von RUFFOLO [1991] Verfahren, das die steilen räumlichen Gradienten an der Ausbreitungsfront der Teilchen besser approximiert, so daß die Anisotropien in der Anfangsphase des Ereignisses systematisch größere Werte annehmen. Zum anderen ist der Zeitschritt Δt bzw. $\Delta \tau$ noch nicht fein genug, als daß sich die zusätzlichen Zwischenzeitschritte im μ -Transport von RUFFOLO [1991] nicht mehr bemerkbar machen. Da es jedoch bei starker Diffusion nur sehr wenige Teilchen gibt, die, (fast) ohne gestreut zu werden, den Beobachter erreichen, ist die Anfangsphase dieser solaren Ereignisse vom Untergrund überdeckt und damit keiner Auswertung zugänglich. Der geringe Unterschied der Ergebnisse beider Verfahren in der Anfangsphase des solaren Ereignisses ist daher ohne praktische Bedeutung.

Beim Vergleich der numerischen Lösungen beider Verfahren hat sich eine sehr gute Übereinstimmung gezeigt. Da beide Verfahren völlig unabhängig voneinander entwickelt wurden, zudem noch in unterschiedlichen Programmiersprachen, können Fehler bei der Programmierung weitestgehend ausgeschlossen werden. Auch die Approximationsgenauigkeit der Transportgleichung durch beide Verfahren scheint mit diesem Vergleich erwiesen. Speziell für das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren bedeutet dies, daß die Approximationsgenauigkeit des Verfahrens von RUFFOLO [1991] fast erreicht wird, jedoch mit einem um Größenordnungen geringeren Rechenaufwand.

Betrachtet man die Anzahl der Zwischenschritte n in RUFFOLO [1991] μ -Transport für die in den Abbildungen 3.9 und 3.10 dargestellten numerischen Lösungen, so ergibt sich folgende Abhängigkeit von der Bogenlänge s : $n = 8$ für $s < 1$ AU, $n = 4$ für $1 \text{ AU} < s < 2 \text{ AU}$ und $n = 2$ für $s > 2 \text{ AU}$ (private Mitteilung von RUFFOLO 20.5.96). Nimmt man über die gesamte Ausbreitungszeit von 6 h einen Durchschnittswert von $n = 4$ an, so ergeben sich $1 + 2 + 4 = 7$ Iterationsschritte. Zusammen mit dem um den Faktor $[35/2] = 17$ aufwendigeren s -Transport ergibt sich eine um zwei Größenordnungen größere Rechenzeit.¹⁸ Dies

¹⁸Bei genauerer Betrachtung muß natürlich berücksichtigt werden, daß der s -Transport von RUFFOLO [1991] einfacher in der Struktur und damit schneller ist als der im GREF-Programm verwendete s -Transport, welcher aus dem upwind-Verfahren und dem FCT besteht. Andererseits kann der um den Faktor 17 erhöhte Speicherplatzbedarf die Rechengeschwindigkeit herabsetzen, falls der zur Verfügung stehende Rechner nicht über

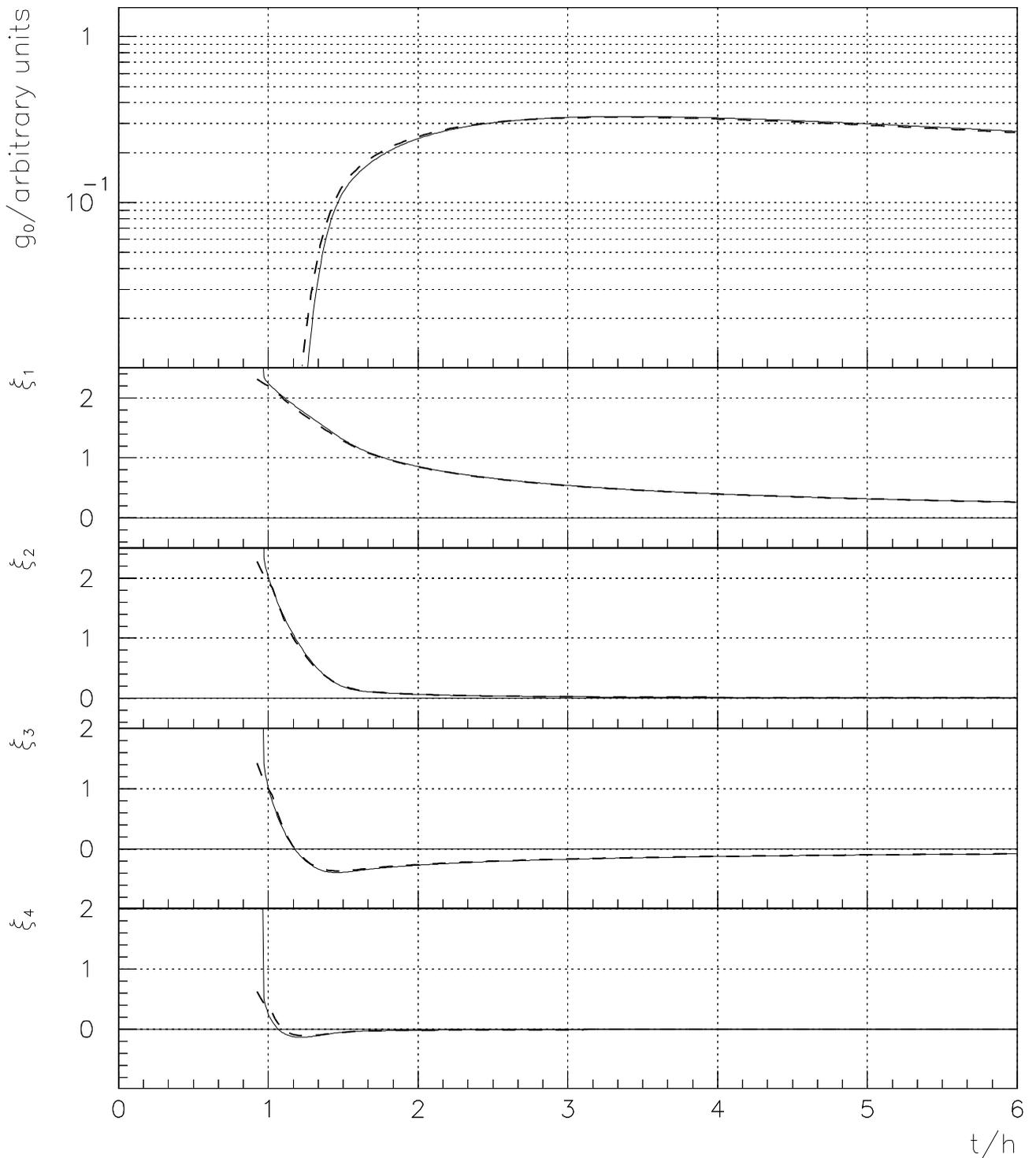


Abbildung 3.9: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_n bis zur vierten Ordnung sind im zeitlichen Verlauf am Ort $r = 1$ AU dargestellt. Die radiale mittlere freie Weglänge beträgt $\lambda_r = 0.1$ AU (siehe Text für weitere Ausbreitungsparameter). Die durchgezogenen Kurven repräsentieren die numerische Lösung von RUFFOLO [1991], die gestrichelten Kurven die des in dieser Arbeit vorgestellten Differenzenverfahrens.

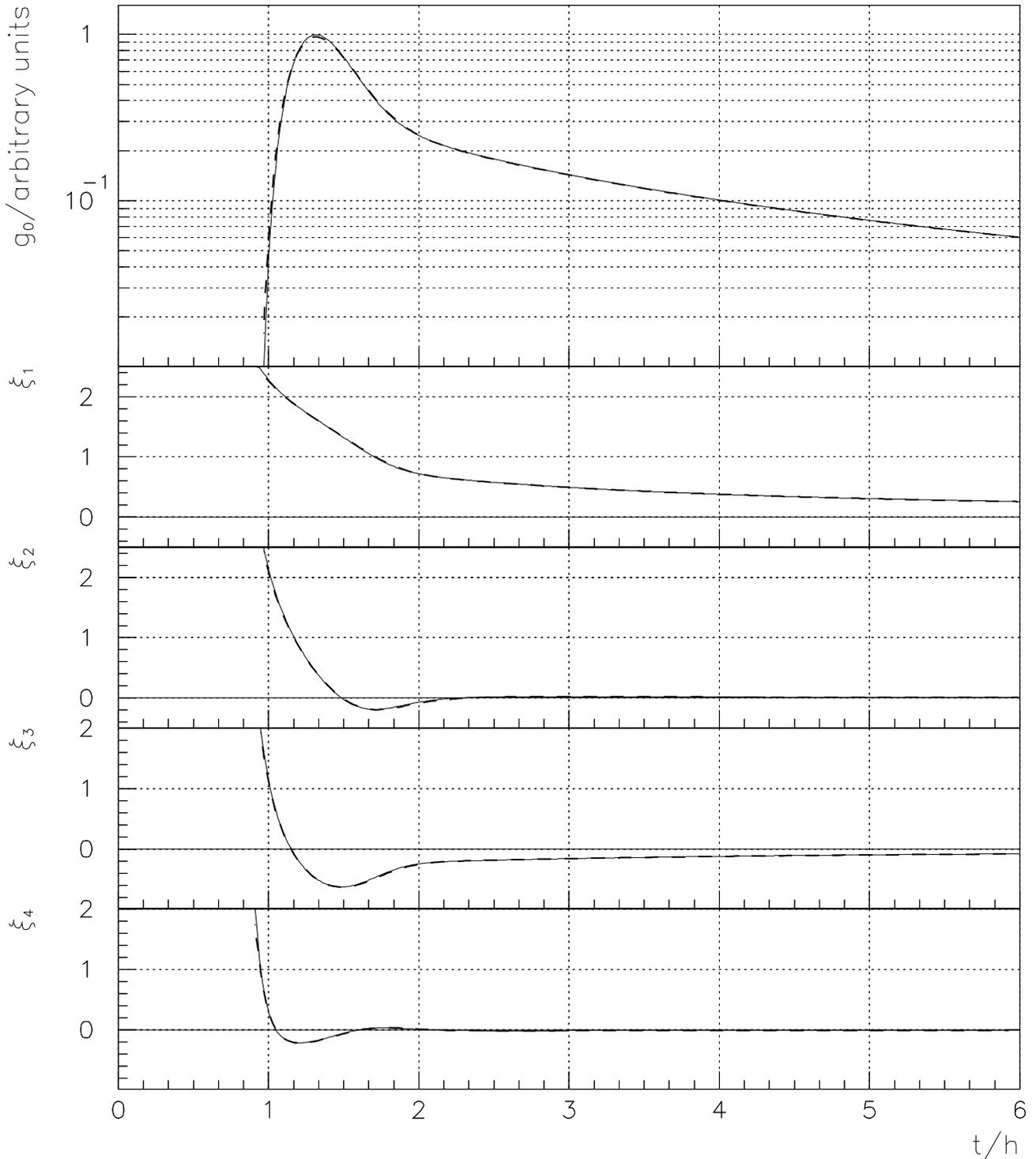


Abbildung 3.10: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_n bis zur vierten Ordnung sind im zeitlichen Verlauf am Ort $r = 1$ AU dargestellt. Die radiale mittlere freie Weglänge beträgt $\lambda_r = 0.4$ AU (siehe Text für weitere Ausbreitungsparameter). Die durchgezogenen Kurven repräsentieren die numerische Lösung von RUFFOLO [1991], die gestrichelten Kurven die des in dieser Arbeit vorgestellten Differenzenverfahrens.

bedeutet für die Berechnung der hier dargestellten numerischen Lösungen eine Rechenzeit von mehreren Stunden im Fall von RUFFOLOS [1991] Verfahren, während das in dem GREF-Programm umgesetzte Verfahren nur weniger Minuten bedarf. Dieser Unterschied von zwei Größenordnungen in der Rechenzeit erweist sich als entscheidend, wenn stationäre Lösungen für unterschiedliche Ausbreitungsbedingungen berechnet werden sollen, da diese Rechnungen wegen der großen Ausbreitungszeit der Teilchen ohnehin schon sehr aufwendig sind.

ausreichend Arbeitsspeicher verfügt. Insgesamt liegt der Laufzeitunterschied beider Programme dennoch bei zwei Größenordnungen, wie direkte Vergleiche der Laufzeiten ergeben haben.

Kapitel 4

Die erweiterte Transportgleichung

In der in Kapitel 2 vorgestellten Transportgleichung (2.1) sind die durch den Sonnenwind verursachten Effekte zunächst vernachlässigt worden. Dies ist sicherlich zu rechtfertigen, wenn die Geschwindigkeit v der geladenen Teilchen wesentlich größer ist als die Sonnenwindgeschwindigkeit $v_{\text{sw}} \approx 400$ km/s.

In diesem Kapitel soll nun eine quantitative Aussage über den Beitrag der durch den Sonnenwind bedingten Effekte zum Transport der geladenen Teilchen in der inneren Heliosphäre gemacht werden. Von besonderem Interesse ist dabei der Energiebereich der Elektronen, Protonen und α -Teilchen von einigen MeV bis zu einigen 10 MeV, der mit dem E6-Experiment auf den HELIOS-Satelliten abgedeckt wird (siehe Abschnitt 1.2).

4.1 Die Verteilungsfunktion $F(t, s, \mu', p')$

Nachdem lange Zeit keine Transportgleichung bekannt war, die sowohl durch den Sonnenwind verursachte Impulsänderungen der Teilchen als auch vom Pitchwinkel abhängige Effekte wie die Fokussierung berücksichtigt, ist es RUFFOLO [1995] gelungen, die Transportgleichung (2.58) um die entsprechenden Terme zu erweitern. Beschränkt man sich auf die wesentlichen Terme dieser erweiterten Transportgleichung (siehe Gleichung (11) bei RUFFOLO [1995]), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial s} \left(\left[\mu' v' + \left(1 - \frac{(\mu' v')^2}{c^2} \right) v_{\text{sw}} \sec(\Psi) \right] F \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mu'} \left(v' \frac{1 - \mu'^2}{2L(s)} F - \kappa(s, \mu') \frac{\partial F}{\partial \mu'} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial p'} \left(p' v_{\text{sw}} \left[\frac{\sec(\Psi)}{2L(s)} (1 - \mu'^2) + \cos(\Psi) \frac{d}{dr} (\sec(\Psi)) \mu'^2 \right] F \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Wie man sofort erkennt, erhält man die Transportgleichung (2.58) für den Grenzfall $v_{\text{sw}} = 0$.¹

¹Die Fokussierungslänge wird davon unabhängig weiterhin durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes festgelegt.

Die in der erweiterten Gleichung (4.1) auftretende Verteilungsfunktion

$$F(t, s, \mu', p') = \frac{d^3 N}{ds d\mu' dp'} \quad (4.2)$$

gibt die Anzahl der Teilchen im Längenintervall $[s, s + ds]$ entlang der Flußröhre in dem Pitchkosinusintervall $[\mu', \mu' + d\mu']$ und dem Impulsintervall $[p', p' + dp']$ an und ist damit proportional zur differentiellen Intensität. Bei der Größe F handelt es sich somit nicht um die Phasenraumdichte! Auf diesen Unterschied ist deshalb besonders hinzuweisen, damit die Energiespektren der differentiellen Intensität $I(E')$ korrekt in Impulsspektren $I(p')$ umgerechnet werden. Diese können dann direkt mit den Lösungen $F(t, s, \mu', p')$ der erweiterten Transportgleichung verglichen werden. Für den einfachen Fall eines Potenzgesetzes im Energiespektrum der bei einem solaren Ereignis gemessenen differentiellen Intensität ²

$$I \propto \left(\frac{E'}{E'_0} \right)^{-\gamma'} \quad (4.3)$$

folgt für nichtrelativistische Energien unmittelbar ein Potenzgesetz im Impulsspektrum:

$$F \propto \left(\frac{p'}{p'_0} \right)^{-\delta'} \quad \text{mit} \quad \delta' \stackrel{\text{def}}{=} 2\gamma' \quad (4.4)$$

RUFFOLO [1995] verwendet exemplarisch die Werte $\delta' = 2.5$ und 5 für seine Berechnungen, wobei er bei einem Wert von $\delta' = 5$ von einem sehr steilen Spektrum spricht, während $\delta' = 2.5$ nach seiner Aussage einem typischen Verlauf eines Spektrums nahekommt. Da ein typisches Energiespektrum eines solaren Ereignisses jedoch einen Exponenten von $\gamma' = 2.5$ aufweist, folgt daraus nach der Gleichung (4.4) ein Exponent für das entsprechende Impulsspektrum von $\delta' = 5$. Daß RUFFOLO [1995] ein Impulsspektrum mit $\delta' = 5$ dennoch als sehr steiles Spektrum bezeichnet, ist darauf zurückzuführen, daß er fälschlicherweise den Faktor 2 in der Gleichung (4.4) übersehen hat (Bestätigung durch private Mitteilung von RUFFOLO vom 21.11.1995).

4.2 Die Bezugssysteme

4.2.1 Definition der Bezugssysteme

Die in der Verteilungsfunktion $F(t, s, \mu', p')$ auftretenden Variablen Zeit t , Ort s entlang der Magnetfeldlinie, Pitchkosinus μ' und Impulsbetrag p' stammen aus zwei unterschiedlichen Bezugssystemen. Die gestrichelten Größen μ' und p' sind in einem sich mit dem Sonnenwind *mitbewegten Bezugssystem* definiert, während der Ort s sich an einem festen Punkt auf der Magnetfeldlinie (ortsfestes Bezugssystem) befindet, so daß die Bogenlänge s konstant ist. Aufgrund der Winkelgeschwindigkeit ω_s der Sonnenrotation ist es angebracht, das ortsfeste Bezugssystem zusätzlich mit der Sonne mitrotieren zu lassen (*Korotation*). Dies ist in doppelter Hinsicht vorteilhaft: Zum einen befindet sich der Ort s immer auf derselben Magnetfeldlinie, entlang welcher sich die energiereichen Teilchen in idealisierter Weise in Form einer

²Die Annahme eines Potenzgesetzes im Energiespektrum soll nur stückweise in dem hier betrachteten Energieintervall gelten. Würde man hingegen ein Potenzgesetz mit $\gamma \geq 1$ für den gesamten Energiebereich von $E \in [0, \infty]$ annehmen, so würde sich für $\gamma \geq 1$, über den gesamten Energiebereich integriert, eine unendliche Intensität ergeben.

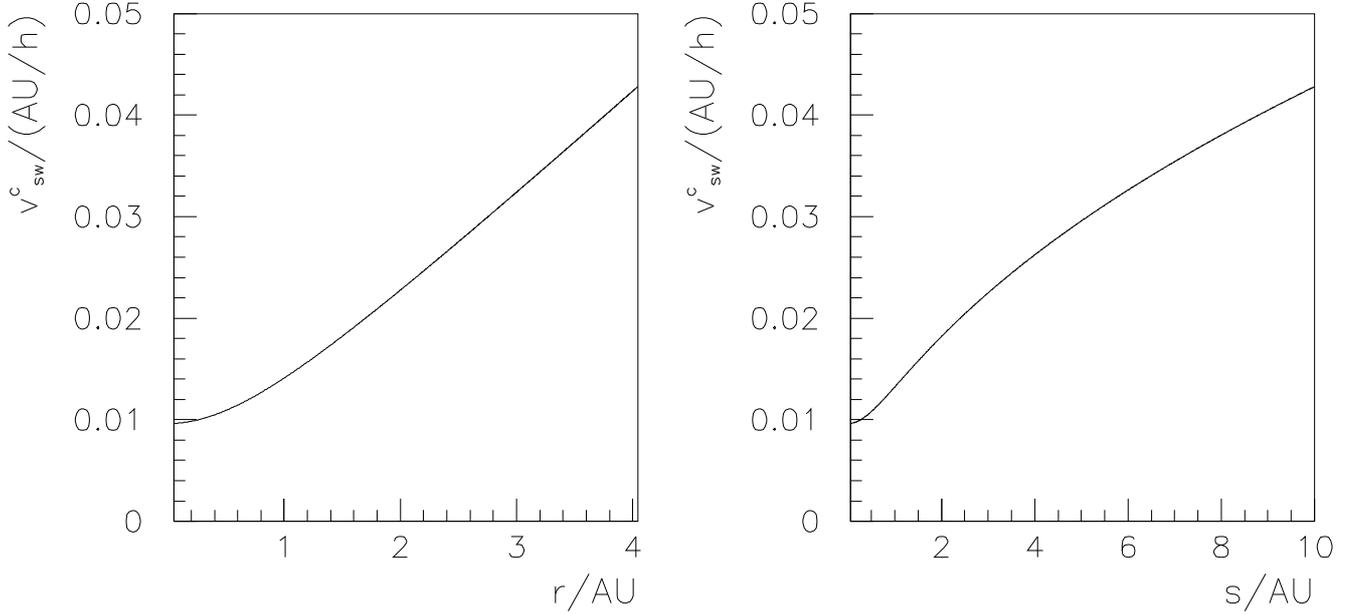


Abbildung 4.1: Der Betrag der Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c (in AU/h) im korotierenden ortsfesten Bezugssystem ist für eine radiale Komponente von $v_{\text{sw}} = 400$ km/s in Abhängigkeit vom radialen Abstand r (links) und von der Bogenlänge s entlang der Magnetfeldlinie dargestellt.

Flußröhre ausbreiten; zum anderen führt die Projektion der im ortsfesten Bezugssystem radial von der Sonne weggerichteten Sonnenwindgeschwindigkeit $v_{\text{sw}}\hat{r}$ auf das *korotierende ortsfeste Bezugssystem* zu einer Sonnenwindgeschwindigkeit \mathbf{v}_{sw}^c , die tangential zur Magnetfeldlinie verläuft:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{sw}}^c &= v_{\text{sw}}\hat{r} - \omega_s r \sin(\theta) \hat{\phi} \\ &= v_{\text{sw}}^c \hat{s}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Für den Betrag der Sonnenwindgeschwindigkeit im korotierenden ortsfesten Bezugssystem ergibt sich

$$v_{\text{sw}}^c = v_{\text{sw}} \sec(\Psi(s)) \quad (4.6)$$

mit dem bereits in Abschnitt 2.1.1 eingeführten Winkel Ψ zwischen der radialen Richtung und der Archimedischen Spirale des interplanetaren Magnetfeldes.

In Abbildung 4.1 ist der Betrag der Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c im korotierenden ortsfesten Bezugssystem für eine radiale Komponente von $v_{\text{sw}} = 400$ km/s in Abhängigkeit sowohl von dem radialen Abstand r als auch von der Bogenlänge s entlang der Magnetfeldlinie aufgetragen. Die Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c in Abbildung 4.1 ist in der Einheit AU/h angegeben, um einen besseren Vergleich mit der Teilchengeschwindigkeit v zu ermöglichen, die bei energiereichen Teilchen im Sonnensystem üblicherweise in AU/h angegeben wird. Wie aus der Abbildung 4.1 zu entnehmen ist, steigt die Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c mit zunehmendem Abstand von der Sonne monoton an und beträgt bereits bei wenigen AU radialen Abstands ein Vielfaches der radialen Komponente $v_{\text{sw}} = 0.0096$ AU/h. Grund hierfür ist die

Geschwindigkeitskomponente der Korotation, die mit größer werdendem radialen Abstand monoton ansteigt. Für extrem große Abstände von der Sonne (> 700 AU; zum Vergleich: der Radius der Heliosphäre beträgt ≈ 100 AU) bedeutet dies, daß die Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c nach Gleichung (4.6) theoretisch größer werden kann als die Lichtgeschwindigkeit c . Praktisch ist dies aber ohne Bedeutung, da der radiale Gültigkeitsbereich der erweiterten Transportgleichung ohnehin durch den nicht berücksichtigten Effekt der Querdiffusion beschränkt wird, die mit radialem Abstand an Bedeutung zunimmt.

4.2.2 Die Compton-Getting-Transformation

Für einen Betrachter im korotierenden ortsfesten Bezugssystem scheint sich der Ursprung des im Sonnenwind verankerten und somit mitgeführten Koordinatensystems mit der Geschwindigkeit v_{sw}^c in positiver Richtung entlang der Magnetfeldlinie s fortzubewegen. Unter der Annahme, daß der Betrag der Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c wesentlich kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit c , d. h. unter Vernachlässigung der Terme von der Ordnung $(v_{\text{sw}}^c/c)^2$, transformieren sich die Teilchengeschwindigkeiten zu:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{\text{sw}}^c \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{sw}}^c \quad (4.7)$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$v\mu = v'\mu' + v_{\text{sw}}^c \quad \Leftrightarrow \quad v'\mu' = v\mu - v_{\text{sw}}^c \quad (4.8)$$

Die Phasenraumdicke ist, wie schon in Kapitel 2 erwähnt, invariant unter Lorentz-Transformationen, so daß mit dem in Polarkoordinaten geschriebenen Impulsvektor \mathbf{p} gilt:

$$f(p, \vartheta, \varphi) = f'(p', \vartheta', \varphi') \quad (4.9)$$

Für eine Pitchwinkelverteilung im mitbewegten System des Sonnenwindes bedeutet dies, daß die entsprechende Winkelverteilung im korotierenden ortsfesten Bezugssystem ebenfalls eine Pitchwinkelverteilung ergeben muß, da die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Teilchen durch die Transformation (4.8) der Geschwindigkeiten nicht beeinflußt wird.³ Für ein ortsfestes, **nicht** korotierendes Bezugssystem bleiben die Pitchwinkelverteilungen bei der Transformation vom mitbewegten Bezugssystem in das ortsfeste Bezugssystem im allgemeinen nicht erhalten. Die Winkelverteilungen im ortsfesten Bezugssystem lassen sich dann nur noch durch allgemeine Kugelfunktionen beschreiben (vgl. STEVENS AND HOYNG [1986]).

Für die folgenden Betrachtungen im Zusammenhang mit dem hier verwendeten korotierenden ortsfesten Bezugssystem vereinfacht sich die Gleichung (4.9) für Pitchwinkelverteilungen zu:

$$f(p, \mu) = f'(p', \mu') \quad (4.10)$$

³Berücksichtigt man bei der Transformation zusätzlich die relativistischen Effekte, so wird zwar die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Ausbreitungsrichtung verändert, jedoch nicht die Abhängigkeit vom Azimutwinkel φ' bzw. φ (vgl. JACKSON [1982], S. 621f.). Unter der Voraussetzung, daß sich die Inertialsysteme in Richtung der Symmetrieachse der Pitchwinkelverteilungen zueinander bewegen, werden Pitchwinkelverteilungen bei der Addition von Geschwindigkeiten in Pitchwinkelverteilungen überführt.

Für die Transformation des Betrags des Impulses p' in das korotierende ortsfeste Bezugssystem erhält man für nichtrelativistische Energien unter Verwendung der Transformation (4.7) und des Kosinussatzes:

$$p' = p \sqrt{1 - 2 \frac{v_{\text{sw}}^c}{v} \mu + \left(\frac{v_{\text{sw}}^c}{v} \right)^2} \quad (4.11)$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung (4.8) läßt sich unmittelbar die Transformation des Pitchkosinus μ' ableiten

$$\mu' = \frac{\mu - \frac{v_{\text{sw}}^c}{v}}{\sqrt{1 - 2 \frac{v_{\text{sw}}^c}{v} \mu + \left(\frac{v_{\text{sw}}^c}{v} \right)^2}} \quad (4.12)$$

so daß sich schließlich für einen Beobachter im korotierenden ortsfesten Bezugssystem folgende Phasenraumdichte ergibt (vgl. IPAVICH [1974]):

$$f(p, \mu) = f' \left(p \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2}, \frac{\mu - \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2}} \right) \quad \text{mit} \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_{\text{sw}}^c}{v} \quad (4.13)$$

Diese Transformation wird üblicherweise als *Compton-Getting-Transformation* bzw. *Compton-Getting-Effekt* bezeichnet (siehe COMPTON AND GETTING [1935]). Der Beobachter im korotierenden ortsfesten Bezugssystem "tastet" sozusagen je nach Blickrichtung die Phasenraumdichte f' sowohl für unterschiedliche Impulse als auch für unterschiedliche Winkel ab. Die scheinbare Veränderung der Phasenraumdichte f' ergibt sich somit durch eine Transformation sowohl des Impulses p' als auch des Pitchkosinus μ' . Ist die Winkelverteilung z. B. im mitbewegten Bezugssystem isotrop, so führt die Transformation des Pitchkosinus μ' zu keiner Veränderung der Pitchwinkelverteilung. Dadurch aber, daß der Beobachter im korotierenden ortsfesten Bezugssystem je nach Blickrichtung unterschiedliche Impulse der Phasenraumdichte f' im mitbewegten Bezugssystem "abtastet", scheint die Pitchwinkelverteilung für den Beobachter nicht isotrop, falls die Impulsverteilung der Phasenraumdichte f' nicht gleichförmig ist. Läßt sich das Impulsspektrum beispielsweise durch ein Potenzgesetz mit einem Exponenten ungleich null beschreiben, so "tastet" der Beobachter je nach Blickrichtung dieses Impulsspektrum ab und beobachtet eine winkelabhängige Phasenraumdichte f .

Wie bereits erwähnt, lassen sich die Energiespektren solarer Ereignisse durch Potenzgesetze der Form (4.3) mit einem typischen Spektralindex von $\gamma' = 2.5$ beschreiben. Unter Verwendung der Beziehung zwischen differentieller Intensität I und der Phasenraumdichte $I = p^2 f$ (Gleichung (2.2)) und der Transformation des Impulses p' folgt:

$$I \propto E^{-\gamma} (1 - 2\alpha\mu + \alpha^2)^{-(\gamma'+1)} \quad (4.14)$$

Für einen Detektor, der nur die Energie E_0 wahrnimmt, bedeutet dies, daß je nach Blickrichtung unterschiedliche Energien im mitbewegten Bezugssystem "abgetastet" werden. Isotrope Pitchwinkelverteilungen im mitbewegten Bezugssystem werden somit im korotierenden ortsfesten Bezugssystem, abgesehen von dem Spezialfall $\gamma' = -1$, zu anisotropen Pitchwinkelverteilungen. Entwickelt man z. B. die Gleichung (4.14) für $\alpha \ll 1$ und $\gamma' = 2.5$ in einer Taylorreihe bis zum linearen Glied, so ergibt sich:

$$I \propto E^{-\gamma'} (1 + 7\alpha\mu) \quad (4.15)$$

Die Transformation des Impulses p' führt somit zu einer Anisotropie in Richtung des Sonnenwindes, d. h. entlang der Magnetfeldlinie in sonnenabgewandter Richtung.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß sich die Phasenraumdicke $f'(p', \mu')$ über einen begrenzten Impulsbereich in einen impulsabhängigen und einen winkelabhängigen Anteil separieren läßt (vgl. IPAVICH [1974])

$$f'(p', \mu') = g'(p') \cdot h'(\mu') \quad (4.16)$$

ergibt sich die differentielle Intensität im korotierenden ortsfesten Bezugssystem zu:

$$I \propto E^{-\gamma'} (1 - 2\alpha\mu + \alpha^2)^{-(\gamma'+1)} \cdot h' \left(\frac{\mu - \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2}} \right) \quad (4.17)$$

4.3 Die Konvektion

Der zweite Term der erweiterten Transportgleichung (4.1) ist im wesentlichen identisch mit dem Advektionsterm der Transportgleichung (2.58). Unter Verwendung der Transformation (4.8) lassen sich beide Terme ineinander überführen. Der Faktor $1 - (\mu'v'/c)^2$ dient lediglich dazu, eventuell durch die Addition der Geschwindigkeiten auftretende Überlichtgeschwindigkeiten zu vermeiden. Wie bereits in Abschnitt 3.2.1.1 erwähnt, läßt sich der Advektionsterm anschaulich mit der Bewegung der Teilchen entlang der Magnetfeldlinie und damit der Koordinate der Bogenlänge s in Verbindung bringen. Bei der erweiterten Transportgleichung vollzieht sich die Ausbreitung der Teilchen in einem Medium (mitbewegtes Bezugssystem), das sich wegen der Konvektion bezüglich eines festen Ortes s auf der Magnetfeldlinie bewegt. Die Bewegung der Teilchen setzt sich demnach zum einen aus der Geschwindigkeitskomponente $v'\mu'$ parallel zur Magnetfeldlinie im mitbewegten Bezugssystem und zum anderen aus der Relativbewegung v_{sw}^c der Bezugssysteme zueinander zusammen.

Zum besseren Verständnis der Auswirkungen des Advektionsterms in der erweiterten Transportgleichung soll zunächst im weiteren Verlauf dieses Abschnitts der Term der adiabatischen Dezeleration (vierter Term der erweiterten Transportgleichung) unberücksichtigt bleiben. Dies geschieht nur aus didaktischen Gründen, da bei einer von null verschiedenen Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c sowohl die Mitführung der Teilchen im Sonnenwind (*Konvektion*) als auch die Veränderung des Teilchenimpulses (*adiabatische Dezeleration*) zu berücksichtigen sind. Die in diesem Abschnitt zu behandelnde PDGl reduziert sich somit für nicht-relativistische Teilchengeschwindigkeiten v' auf die Form:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(v' \left[\mu' + \frac{v_{\text{sw}}^c}{v'} \right] F \right) + \frac{\partial}{\partial \mu'} \left(\frac{v'(1 - \mu'^2)}{2L(s)} F - \kappa(s, \mu') \frac{\partial F}{\partial \mu'} \right) = 0 \quad (4.18)$$

Integriert man diese Gleichung über das Pitchkosinusintervall $[-1, 1]$, so erhält man wie schon in Abschnitt 2.2.4 die Kontinuitätsgleichung (vgl. WEBB AND GLEESON [1979]):

$$\frac{\partial U'_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} |\mathbf{S}'_p| = 0 \quad (4.19)$$

mit

$$U'_p \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{+1} F(\mu') d\mu' \quad \text{und} \quad \mathbf{S}'_p \stackrel{\text{def}}{=} v' \int_{-1}^{+1} \mu' F(\mu') d\mu' \cdot \hat{\mathbf{e}}_B \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_p^* &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{+1} \mathbf{v} \mu' F(\mu') d\mu' = \int_{-1}^{+1} (\mathbf{v}_{\text{sw}}^c + \mathbf{v}') \mu' F(\mu') d\mu' \\
&= \mathbf{v}_{\text{sw}}^c U'_p + \mathbf{S}'_p
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Die Größen U'_p und \mathbf{S}'_p entsprechen dabei der Teilchendichte und dem Stromdichtevektor entlang der Magnetfeldlinie im mitbewegten Bezugssystem. Der Stromdichtevektor \mathbf{S}_p^* gibt die Anzahl der Teilchen an, die zum Zeitpunkt t in dem Längenintervall $[s, s + ds]$ der Flußröhre und dem Impulsintervall $[p, p + dp]$ entlang der Flußröhre strömen. Es wird somit die Stromdichte im mitbewegten Bezugssystem bezüglich eines festen Punktes s auf der Magnetfeldlinie bestimmt, so daß der Stromdichtevektor \mathbf{S}_p^* sich aus dem Stromdichtevektor \mathbf{S}'_p im mitbewegten Bezugssystem und dem durch die Konvektion bedingten Anteil $\mathbf{v}_{\text{sw}}^c U'_p$ zusammensetzt (siehe Gleichung (4.21)).

Für den Betrag der durch die Gleichung (2.66) definierten Anisotropie bedeutet dies:

$$\xi_1^* = 3 \frac{v_{\text{sw}}^c}{v} + \frac{g'_1}{g'_0} = 3 \frac{v_{\text{sw}}^c}{v} + \xi'_1 \tag{4.22}$$

Betrachtet man nun den Verlauf der Anisotropie ξ_1^* an einem festen Ort s für ein solares Ereignis mit einer endlichen zeitlichen Injektion, so verschwindet für den Grenzwertübergang $\lim_{\Delta t \rightarrow \infty}$ die Anisotropie ξ_1^* identisch, da sich die Teilchendichte mit der Zeit immer geringfügiger ändert und damit nach der Kontinuitätsgleichung (4.19) auch der räumliche Gradient des Teilchenstroms. Dies jedoch bedeutet nach der Gleichung (4.22) für den Betrag der Anisotropie ξ'_1 im mitbewegten Bezugssystem, daß sich ein negativer Wert der Größe

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \xi'_1 = -3 \frac{v_{\text{sw}}^c}{v} \tag{4.23}$$

einstellt. Die Teilchen bewegen sich damit im mitbewegten Bezugssystem bevorzugt in Richtung zur Sonne, um der Kontinuitätsgleichung (4.19) zu genügen. Die Kontinuitätsgleichung wahrt, wie in Abschnitt 2.2.4 bereits erwähnt, die Gesamtteilchenzahl. Daraus folgt aber, daß sich im mitbewegten Bezugssystem keine isotrope Pitchwinkelverteilung einstellen kann, die, bedingt durch den Effekt der Konvektion, zu einem Teilchenstrom aus dem inneren Sonnensystem führte, der aufgrund fehlender Quellen eine Verletzung der Gesamtteilchenzahl nach sich zöge.

Anschaulich kann man diesen Sachverhalt folgendermaßen verstehen: Selbst nachdem die Teilchenquelle in der Nähe der Sonne keine Teilchen mehr injiziert, werden die Teilchen weiterhin durch die Konvektion nach außen getrieben. In der Nähe der Sonne strömt somit kontinuierlich interplanetares Plasma ab, das zunächst "frei" von Teilchen ist. Da für den Grenzübergang $\lim_{\Delta t \rightarrow \infty}$ die Teilchen nach der Kontinuitätsgleichung (4.19) über die gesamte Feldlinie gleichmäßig verteilt werden, strömen die von der Konvektion nach außen getragenen Teilchen wieder in Richtung zur Sonne, um das in der Nähe der Sonne abströmende Plasma gleichmäßig aufzufüllen. Die Anisotropie ξ'_1 gibt dabei ein Maß für die Bündelung der Pitchwinkelverteilung an.

Betrachtet man andererseits den Fall einer kontinuierlich injizierenden Quelle in der Nähe der Sonne mit der zusätzlich vereinfachenden Annahme konstanter Ausbreitungsbedingungen, so ist die in Abschnitt 2.2.4 vorgestellte stationäre Lösung (2.65) ebenfalls eine Lösung der Gleichung (4.18) für stationäre Verhältnisse. Grund hierfür ist die entfallende räumliche

Abhängigkeit der Lösung (2.65), so daß der um die Konvektion erweiterte Advektionsterm ohne Bedeutung ist. Es zeigt sich somit, daß bei einer zeitunabhängigen Quelle kein zusätzlicher Rückstrom von Teilchen in Richtung zur Sonne auftritt. Dafür besteht keine Notwendigkeit, da das in der Nähe der Sonne abströmende Plasma kontinuierlich mit Teilchen aufgefüllt wird.

Zum Vergleich der Lösungen der Gleichung (4.18) für eine identisch verschwindende Sonnenwindgeschwindigkeit $v_{\text{sw}}^c = 0$ (durchgezogene Kurven) mit von null verschiedenen Sonnenwindgeschwindigkeiten $v_{\text{sw}}^c > 0$ (gestrichelte bzw. gepunktete Kurven) sind in der Abbildung 4.2⁴ die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_n bis zur vierten Ordnung im zeitlichen Verlauf am Ort $r = 1$ AU dargestellt, wie sie sich unter Verwendung folgender Ausbreitungsparameter ergeben: Die radiale mittlere freie Weglänge beträgt $\lambda_r = 0.4$ AU; der PWSK ist durch die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ festgelegt. Die Injektionsfunktion wird durch ein Reid-Axford-Profil (vgl. Abbildung 3.5) mit $t_A = 0.5$ h und $t_V = 2$ h beschrieben. Für die Geschwindigkeit wird $v = 0.62$ AU/h entsprechend Protonen mit 3.5 MeV angenommen. Für die von null verschiedenen Sonnenwindgeschwindigkeiten wird zum einen eine realistische radiale Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{\text{sw}} = 400$ km/s bzw. 0.0096 AU/h angenommen (gestrichelte Kurven) und zum anderen eine um den Faktor fünf vergrößerte Sonnenwindgeschwindigkeit von 2000 km/s bzw. 0.048 AU/h (gepunktete Kurven). Ein Vergleich zwischen den durchgezogenen und gestrichelten Kurven in der Abbildung 4.2 zeigt, daß der zusätzliche Effekt durch die Konvektion bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU für Protonen mit 3.5 MeV nur geringfügig ist. Schon wesentlich deutlicher ist der Unterschied zwischen den durchgezogenen und den gepunkteten Kurven, da sich die Konvektion wegen der zur besseren Veranschaulichung um den Faktor fünf verstärkten Sonnenwindgeschwindigkeit deutlich bemerkbar macht.

Es läßt sich erkennen, daß die Teilchen durch den Effekt der Konvektion erwartungsgemäß schneller den Beobachter erreichen. Außerdem nimmt die omnidirektionale Intensität in der Spätphase des Ereignisses schneller ab, da die in das innere Sonnensystem zurückgestreuten Teilchen zusätzlich gegen die Konvektion "anlaufen" müssen, um den Beobachter bei $r = 1$ AU zu erreichen. Verstärkt wird dieser Effekt noch durch die mit dem radialen Abstand zunehmende Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c im korotierenden ortsfesten Bezugssystem. Je größer der radiale Abstand der Teilchen zum Beobachter ist, umso schwerer wird es für die Teilchen, gegen die Konvektion anzulaufen. So ist es z. B. möglich, daß Teilchen trotz eines schwach negativen Pitchkosinus μ' im mitbewegten Bezugssystem durch den Effekt der Konvektion in die von der Sonne abgewandte Richtung mitgeführt werden. Für die in Abschnitt 3.2.1.2 diskutierte Bedeutung der äußeren Grenze folgt daraus bei gleichem radialen Abstand von der Sonne ein geringerer Einfluß auf die Lösungen der Transportgleichung im inneren Sonnensystem.

Neben der schneller abnehmenden omnidirektionalen Intensität ist auch die negative Anisotropie in der Spätphase des Ereignisses zu erkennen, da es sich bei den gestrichelten und gepunkteten Kurven um die Pitchwinkelverteilungen im mitbewegten Bezugssystem handelt.

Es läßt sich zusammenfassen, daß der Effekt der Konvektion in dem hier betrachteten Beispiel bei einer typischen radialen Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{\text{sw}} = 400$ km/s und einem radialen Abstand von $r = 1$ AU gering ist. Dies liegt im wesentlichen daran, daß in diesem Beispiel Protonen mit 3.5 MeV bei einer relativ großen radialen mittleren freien Weglänge

⁴Alle Abbildungen, die als Einheit Tage haben, beginnen in dieser Arbeit mit dem Tag eins. Diese Konvention wird eingeführt, um reale Daten darstellen zu können, die mit dem ersten Tag im Jahr beginnen.

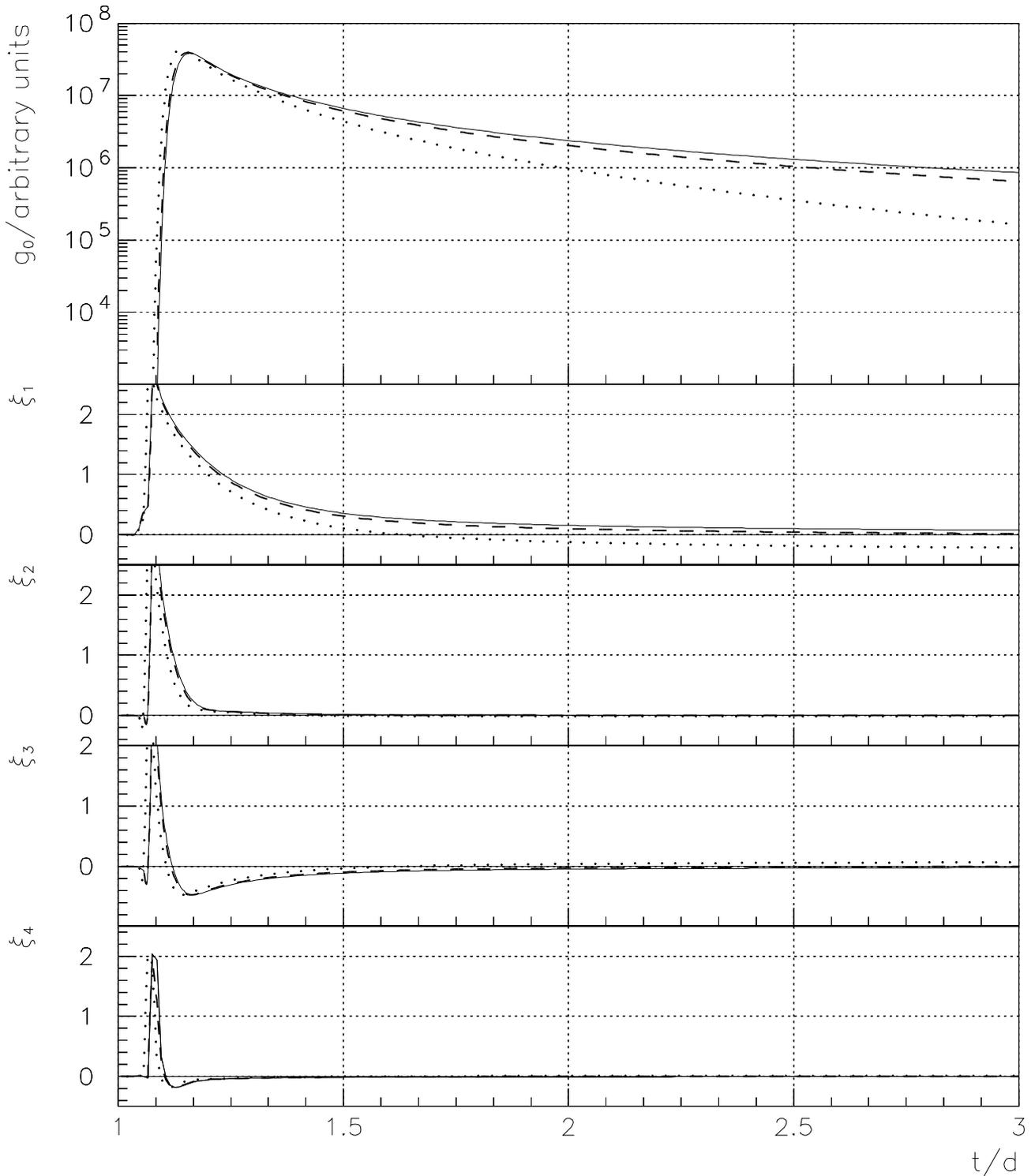


Abbildung 4.2: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_1 – ξ_4 sind bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU über der Zeit aufgetragen (Ausbreitungsbedingungen siehe Text). Die durchgezogenen Kurven entsprechen der numerischen Lösung ohne den Effekt der Konvektion. Bei den gestrichelten Kurven wird die Konvektion mit einer typischen Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{\text{sw}}^c = 400$ km/s und bei den gepunkteten Kurven mit einer theoretischen Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{\text{sw}}^c = 2000$ km/s berücksichtigt.

von $\lambda_r = 0.4$ AU betrachtet werden. Betrachtet man den zweiten Term der Gleichung (4.18), so wird deutlich, daß der Effekt der Konvektion mit zunehmender Teilchenenergie und damit zunehmender Geschwindigkeit v' an Bedeutung verliert, da das Verhältnis v_{sw}^c/v' immer kleiner wird. Die Konvektion macht sich dann nur noch für Teilchen mit einem Pitchkosinus nahe bei null, d. h. $\mu' \approx 0$, bemerkbar. Die Auswirkungen auf den Lösungsverlauf sind dabei sehr gering. Andererseits ist der Effekt der Konvektion bei Protonen im keV-Bereich deutlich ausgeprägt und darf keineswegs vernachlässigt werden.

So ist der Effekt der Konvektion auch bei kleinen mittleren freien Weglängen von größerer Bedeutung, da die Teilchen durch die starke Pitchwinkelstreuung auch räumlich stark gestreut werden und sich daher im Vergleich zu ihrer Geschwindigkeit v' im Mittel nur langsam entlang der Magnetfeldlinie bewegen. Eine zusätzliche konvektive Bewegung in den interplanetaren Raum, die unabhängig von dem Streuprozeß mit der gleichen Geschwindigkeit v_{sw}^c verläuft, macht sich daher durchaus bemerkbar.

4.4 Die adiabatische Dezeleration

Der vierte Term (*Dezelerationsterm*) der erweiterten Transportgleichung (4.1) stellt eine grundlegende Erweiterung im Vergleich zu der Transportgleichung (2.58) dar. Während der Impuls in der Transportgleichung (2.58) als konstant betrachtet wird, ist der Impuls in der erweiterten Transportgleichung eine Variable, deren zeitliche Änderung durch den Dezelerationsterm bestimmt wird.

Entscheidend für den Effekt der adiabatischen Dezeleration ist die Mitführung der energiereichen geladenen Teilchen durch das interplanetare Plasma des Sonnenwindes. Die Kopplung an das interplanetare Plasma geschieht durch die Streuung der Teilchen an den Magnetfeldirregularitäten, die in dem magnetostatischen Modell im Plasma eingefroren sind. Die Teilchen werden zusätzlich zu ihrer eigenen Geschwindigkeitskomponente v_{\parallel} entlang der Magnetfeldlinie von dem radial nach außen in den interplanetaren Raum abströmenden Plasma mitgeführt.

Betrachtet man zunächst der Einfachheit halber Teilchen mit einem Pitchkosinus von $\mu = 0$, d. h. einer identisch verschwindenden Geschwindigkeitskomponente v_{\parallel} entlang der Magnetfeldlinie, so ergibt sich im mitbewegten Bezugssystem eine zeitliche Änderung (Abschwächung) der magnetischen Flußdichte, da sich der Betrag des Magnetfeldes nach der Gleichung (2.8) mit zunehmendem radialen Abstand verringert. Erfolgt die zeitliche Änderung der magnetischen Flußdichte auf Zeitskalen, die deutlich größer sind als die Gyrationperiode des geladenen Teilchens, so gilt wiederum die Erhaltung des Betrags des magnetischen Moments im Sinne der adiabatischen Invarianz (siehe ROEDERER [1970], S. 20). Aus der Definition des magnetischen Moments (siehe Gleichung (2.5)) folgt daraus ein konstantes Verhältnis zwischen dem Impuls der Gyrationbewegung p_{Gyr} und der magnetischen Flußdichte B . Für ein zeitlich schwächer werdendes magnetisches Feld muß somit der Impuls des Teilchens ebenfalls abnehmen, damit das Verhältnis beider Größen zueinander konstant bleibt. In der Literatur wird dieser Effekt auch als *Betatron-Effekt* bezeichnet.

Etwas komplizierter wird die Situation, wenn man sich den Effekt für beliebige Pitchkosinusse veranschaulicht. Zusätzlich zur Gyrationbewegung des Teilchens kommt noch eine Geschwindigkeitskomponente v_{\parallel} entlang der Magnetfeldlinie hinzu, die zu einer Veränderung der räumlichen Lage auf der Magnetfeldlinie führt. Dabei ist die Geschwindigkeit v im ko-

rotierenden ortsfesten Bezugssystem eine Erhaltungsgröße. Die Gesamtenergie des Teilchens bleibt erhalten, teilt sich aber in Abhängigkeit von der Änderung der magnetischen Flußdichte in unterschiedlicher Weise auf die Gyration- und Parallelbewegung des Teilchens auf (Fokussierung). Die Pitchwinkelstreuung erhält hingegen die Geschwindigkeit v' im mitbewegten Bezugssystem. Dies gilt aber nicht für die Fokussierung, die zu einer stetigen Verringerung der Geschwindigkeit v' führt, so daß das Teilchen im Grenzfall einer unendlichen Ausbreitungszeit $v' = 0$ erreichen kann. Ursache hierfür ist die Transformation der Geschwindigkeiten (4.7), aus der unmittelbar folgt, daß eine Erhaltung der Geschwindigkeit v im korotierenden ortsfesten Bezugssystem zu einer Veränderung der Geschwindigkeit v' im mitbewegten Bezugssystem führt. Da nun die erweiterte Transportgleichung (4.1) für die Verteilungsfunktion im mitbewegten Bezugssystem formuliert ist, führt dies zu dem Dezelerationsterm.

Bei genauerer Betrachtung setzt sich der Dezelerationsterm aus zwei Termen zusammen. Der erste Term hat seinen Ursprung in dem oben beschriebenen Betatron-Effekt, d. h. in der adiabatischen Abkühlung in dem mit zunehmendem radialen Abstand schwächer werdenden interplanetaren Magnetfeld. Der zweite Term folgt aus der nicht gleichförmigen Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c im korotierenden ortsfesten Bezugssystem entlang der Magnetfeldlinie. Wie in Abbildung 4.1 gezeigt wurde, nimmt die Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c mit zunehmendem radialen Abstand zu. Für die Magnetfeldfluktuationen, an denen die Teilchen gestreut werden, bedeutet dies eine Bewegung voneinander fort. In Anlehnung an den Prozeß der *Fermi-Beschleunigung 1. Art*, bei dem Teilchen durch wiederholte Wechselwirkungen mit Magnetfeldfluktuationen, die sich aufeinanderzubewegen, Energie gewinnen können (siehe FERMI [1949, 1954]) wird daher auch von einem „*inversen Fermi-Effekt*“ gesprochen (siehe WEBB AND GLEESON [1979]), bei dem die Teilchen Energie verlieren. Beide Terme der adiabatischen Dezeleration sind in ihrer Quantität abhängig von der radialen Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw} und besitzen ein negatives Vorzeichen, d. h. führen zu einer Verringerung des Impulses p' .

Desweiteren sind die Terme symmetrisch in μ' , woraus eine von der Flugrichtung unabhängige Impulsveränderung folgt. Die beiden Terme nehmen jedoch für unterschiedliche Pitchkosinusse μ' ihre maximale Stärke an. Der Betatron-Effekt ist unmittelbar an die Fokussierung gekoppelt, wodurch sich ein maximaler Effekt für $\mu = 0$ ergibt, da die zeitliche Veränderung $d\mu/dt$ für $\mu = 0$ am größten ist. Teilchen, die einen Pitchkosinus von $\mu' = \pm 1$ haben, werden hingegen nicht beeinflußt, da die Fokussierung keine Wirkung auf Teilchen hat, die keine Gyrationbewegung vollziehen. Genau entgegengesetzt verhält sich der inverse Fermi-Effekt, da hier Teilchen mit $\mu' = \pm 1$ am stärksten beeinflußt werden. Dies liegt an der Bewegung der Magnetfeldfluktuationen voneinander fort, die von einem Teilchen am stärksten wahrgenommen wird, wenn es mit maximaler Geschwindigkeit entlang der Feldlinie fliegt. Hat es hingegen den Pitchkosinus $\mu' = 0$, so bleibt es in einem bestimmten Abschnitt des interplanetaren Plasmas, ohne die relative Bewegung der lokalen Sonnenwindbezugssysteme voneinander fort wahrzunehmen.

Zur Veranschaulichung der minimalen Zeitkonstanten, die bei beiden Termen der adiabatischen Dezeleration auftreten, wird für den Term des Betatron-Effekts ein Pitchkosinus von $\mu' = 0$ und für den Term des inversen Fermi-Effekts ein Pitchkosinus von $\mu' = \pm 1$ angenommen. Die beiden Terme lassen sich dann folgendermaßen schreiben:

$$-\frac{1}{\tau_B} \frac{\partial}{\partial p'}(p'F) \quad \text{mit} \quad \tau_B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2L(r)}{v_{\text{sw}}^c} \quad (4.24)$$

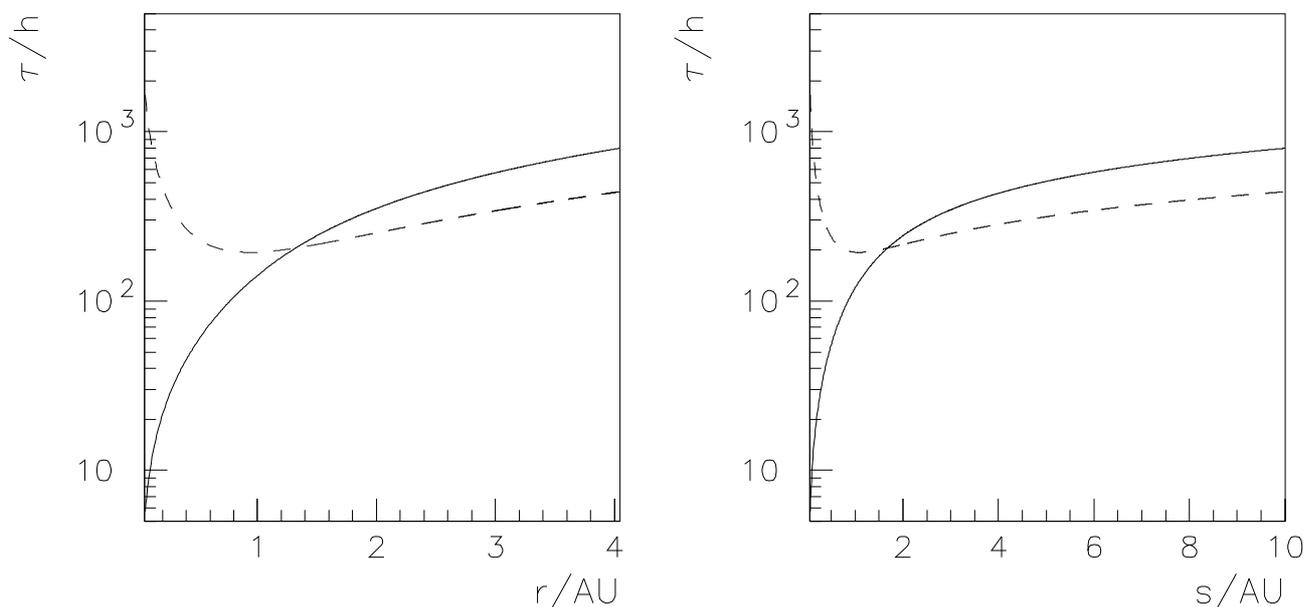


Abbildung 4.3: Die minimale Zeitkonstante τ_B des Betatron-Effekts (durchgezogene Kurve) und die minimale Zeitkonstante τ_F des inversen Fermi-Effekts (gestrichelte Kurve) sind in Abhängigkeit vom radialen Abstand r (links) und von der Bogenlänge s entlang der Magnetfeldlinie dargestellt.

$$-\frac{1}{\tau_F} \frac{\partial}{\partial p'}(p'F) \quad \text{mit} \quad \tau_F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{v_{\text{sw}}} \frac{\sec(\Psi)}{\frac{d}{dr}(\sec(\Psi))} = \frac{1}{v_{\text{sw}}} \left(r + \frac{1}{r\beta^2} \right) \quad (4.25)$$

In der Abbildung 4.3 sind die Zeitkonstanten τ_B (durchgezogene Kurve) und τ_F (gestrichelte Kurve) in Abhängigkeit sowohl vom radialen Abstand r als auch von der Bogenlänge s in AU aufgetragen. Da die Zeitkonstanten einen großen Wertebereich umfassen, erfolgt die Darstellung in einem halblogarithmischen Maßstab. Die Zeitkonstante τ_B des Betatron-Effekts ist eine mit dem radialen Abstand monoton steigende Funktion, da sie unmittelbar an die Fokussierungslänge gekoppelt ist. Für sehr kleine radiale Abstände ergeben sich somit kleine Zeitkonstanten τ_B , d. h. der Betatron-Effekt führt in diesem räumlichen Bereich bereits auf kleinen Zeitskalen zu einer Verringerung des Impulses p' der Teilchen. Für große radiale Abstände verliert der Betatron-Effekt hingegen an Bedeutung. Vergleicht man den Betrag der Zeitkonstante τ_F des inversen Fermi-Effekts mit dem Betrag der Zeitkonstante τ_B des Betatron-Effekts, so wird deutlich, daß der inverse Fermi-Effekt für radiale Abstände mit $r < 1$ AU nur einen geringen Beitrag zur adiabatischen Dezeleration liefert. Für die Zeitkonstante τ_F ergibt sich ein minimaler Wert von

$$\tau_F(r_{\text{min}} = \frac{1}{\beta} = 0.93 \text{ AU}) = \frac{2}{v_{\text{sw}}} = 194 \text{ h} \quad (4.26)$$

Für sehr kleine und große radiale Abstände wird die Zeitkonstante des inversen Fermi-Effekts immer größer. Dennoch ist bei großen radialen Abständen der Beitrag zur adiabatischen Dezeleration größer als der Beitrag des Betatron-Effekts. Dies liegt daran, daß die adiabatische Dezeleration für große radiale Abstände insgesamt an Bedeutung verliert.

Nachdem die Einzeltermine des Dezelerationsterms besprochen worden sind, sollen nun, analog zum vorhergehenden Abschnitt, die Auswirkungen an einem konkreten Beispiel aufgezeigt werden. Es wird diesmal jedoch der Konvektionsterm vernachlässigt, um sich ausschließlich auf den Beitrag des Dezelerationsterms konzentrieren zu können. Für die im folgenden zu betrachtende PDGl ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial s} (\mu' v' F) \\
&+ \frac{\partial}{\partial \mu'} \left(v' \frac{1 - \mu'^2}{2L(s)} F - \kappa(s, \mu') \frac{\partial F}{\partial \mu'} \right) \\
&- \frac{\partial}{\partial p'} \left(p' v_{\text{sw}} \left[\frac{\sec(\Psi)}{2L(s)} (1 - \mu'^2) + \cos(\Psi) \frac{d}{dr} (\sec(\Psi)) \mu'^2 \right] F \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Dabei ist es vorteilhaft, dieselben Ausbreitungsparameter wie im vorhergehenden Abschnitt zu wählen. Der Vergleich der Lösungen der Gleichung (4.27) erfolgt analog zu Abbildung 4.2 für eine identisch verschwindende Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{\text{sw}} = 0$ (durchgezogene Kurven) und eine typische radiale Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{\text{sw}} = 400$ km/s (gestrichelte Kurven). Die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_n bis zur vierten Ordnung sind in der Abbildung 4.4 im zeitlichen Verlauf am Ort $r = 1$ AU dargestellt. Betrachtet man die omnidirektionale Intensität, so wird deutlich, daß die adiabatische Dezeleration zu einer geringeren omnidirektionale Intensität in der Spätphase des Ereignisses führt. Die adiabatische Dezeleration macht sich umso stärker bemerkbar, je weiter die Ausbreitungszeit voranschreitet. Bedingt durch den Impulsverlust, den die Teilchen erleiden, verlassen einerseits Teilchen die Energie von 3.5 MeV zu niedrigeren Energien, während andererseits aber auch Neuzugänge von höheren Energien zu verzeichnen sind. Das in diesem Beispiel gewählte Spektrum mit $\gamma' = 2.5$ bzw. $\delta' = 5$ führt jedoch dazu, daß pro Zeiteinheit die Abgänge die Neuzugänge übersteigen. Der Nettoeffekt führt somit zu einer stetigen Verringerung der omnidirektionalen Intensität. Damit ist gleichzeitig eine geringere Abhängigkeit von der äußeren Grenze verbunden ($s_b = 12$ AU), da es weniger Teilchen gelingt, die Information über die Beschaffenheit der äußeren Grenze zum Beobachtungsort zu tragen.

Die Anisotropien ξ_n unterscheiden sich hingegen nur geringfügig durch die Berücksichtigung der adiabatischen Dezeleration. Das erste Ansteigen der Anisotropien wird durch sehr wenige Teilchen hervorgerufen, die aufgrund der numerischen Diffusion (siehe nächsten Abschnitt) Ausbreitungsgeschwindigkeiten erlangen, die größer als v' sind. Es handelt sich somit nicht um einen physikalischen Effekt. Der darauffolgende steile Anstieg in den Anisotropien ist etwas frühzeitiger in den gestrichelten Kurven zu erkennen. Verständlich wird dies, wenn man sich bewußt macht, daß diese Teilchen den größten Teil der Strecke zwischen Beobachter und Quelle als Teilchen mit einer höheren Energie und damit höheren Ausbreitungsgeschwindigkeit zurückgelegt haben, bevor sie durch den von der adiabatischen Dezeleration hervorgerufenen Impulsverlust als Protonen mit 3.5 MeV vom Beobachter bei $r = 1$ AU registriert werden. Aber auch bei diesen Teilchen handelt es sich um relativ wenige, so daß der eigentliche Anstieg in der omnidirektionalen Intensität für beide Kurven zusammenfällt. In der Spätphase des Ereignisses führt die adiabatische Dezeleration schließlich zu einem schnelleren Abklingen der Anisotropien, was sich besonders in der Anisotropie erster Ordnung bemerk-

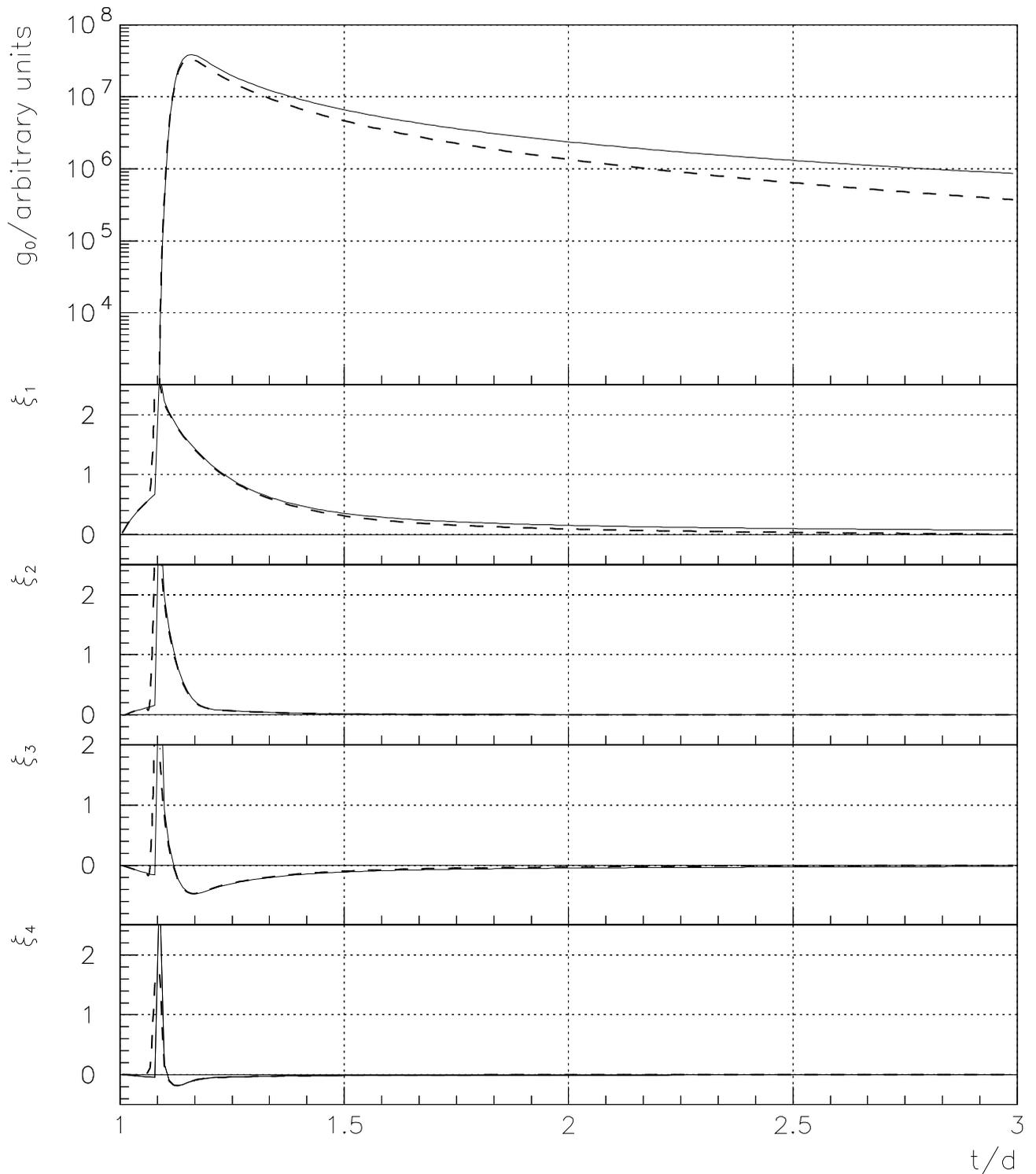


Abbildung 4.4: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_1 – ξ_4 sind bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU für Protonen von 3.5 MeV über der Zeit aufgetragen (Ausbreitungsbedingungen siehe Text). Es wird zwischen den numerischen Lösungen ohne (durchgezogene Kurven) und mit (gestrichelte Kurven) dem Effekt der adiabatischen Dezeleration unterschieden.

bar macht, da diese im Gegensatz zu den anderen Ordnungen auch in der Spätphase noch geringfügig von null verschieden ist.

Zusammenfassend läßt sich somit sagen, daß sich die adiabatische Dezeleration am stärksten in der omnidirektionalen Intensität, und zwar in der Spätphase des Ereignisses bemerkbar macht. Der Einfluß auf die Anisotropien ist hingegen nur gering.

4.5 Das erweiterte Differenzenverfahren

Aufbauend auf dem in Kapitel 3 vorgestellten Differenzenverfahren werden in diesem Abschnitt Erweiterungen vorgenommen, die es schließlich ermöglichen, die erweiterte Transportgleichung (4.1) numerisch zu lösen. Die dafür notwendigen mathematischen Methoden sind bereits in Kapitel 3 vorgestellt worden. Dieser Abschnitt ist daher ohne die Kenntnis von Kapitel 3 nicht verständlich. Der Leser, der nicht an den mathematischen Methoden interessiert ist, kann diesen, wie schon Kapitel 3, überschlagen und direkt zum Abschnitt 4.6 übergehen, in dem die kombinierten Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration behandelt werden.

Der grundlegende Unterschied zwischen der Transportgleichung (2.58) und der erweiterten Transportgleichung ergibt sich aus dem Dezelerationsterm (vierter Term), der den Impuls p' als neue Variable einführt. Die Transportgleichung wird damit um eine Dimension erweitert, wodurch sich zwangsläufig eine Erweiterung des äquidistanten Gitters um die Impulskordinate ergibt. Das bisherige äquidistante Gitter kann man als zweidimensionale μ - s -Ebene auffassen, auf deren Gitterpunkten die Funktionswerte zu einem bestimmten Zeitpunkt τ^n gespeichert sind. Jeder darauffolgende Zeitschritt aktualisiert die jeweiligen Funktionswerte auf den Gitterpunkten des gesamten μ - s -Rasters. Diese μ - s -Ebene ist nun um die Koordinate des Impulses zu erweitern, so daß sich ein μ - s - \tilde{p}' -Quader ergibt, dessen Funktionswerte bei jedem Zeitschritt auf allen Gitterpunkten aktualisiert werden müssen. Das äquidistante Gitter läßt sich somit folgendermaßen definieren:

$$\begin{array}{ll} \mu'\text{-Gitter:} & \mu'_i = -1 + (i + \frac{1}{2}) \Delta\mu' \quad i = 0, 1, \dots, I - 1 \quad \text{mit} \quad I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\Delta\mu'} \\ s\text{-Gitter:} & s_j = j \Delta s \quad j = 0, 1, \dots, J \\ \tilde{p}'\text{-Gitter:} & \tilde{p}'_k = k \Delta\tilde{p}' \quad k = 0, 1, \dots, K \\ t\text{-Gitter:} & t^n = n \Delta t \quad n = 0, 1, \dots, N \end{array}$$

Die Anzahl der Gitterpunkte vervielfacht sich um den Faktor $K + 1$, so daß sich der im Computer belegte Arbeitsspeicher um den gleichen Faktor erhöht. Bei dem im weiteren Verlauf verwendeten Wert von $K = 31$ ergibt sich ein um den Faktor 32 erhöhter Speicherbedarf, so daß sich der gesamte Speicherplatzbedarf des NGREF-Programms, in dem das Differenzenverfahren zur Lösung der erweiterten Transportgleichung umgesetzt ist, auf 42 MB (MB = Megabyte) beläuft. Dieses technische Detail sei erwähnt, um zu zeigen, welche technischen Anforderungen an den Computer sich aus der Erweiterung der Transportgleichung um eine Variable ergeben.

Aus den unterschiedlichen Impulsen bzw. Energien der Teilchen folgt natürlich auch, daß die Geschwindigkeit v' zu einer Variablen wird. Eine speziell an die Geschwindigkeit v' angepaßte Zeitskala τ wie in Gleichung (2.70) ist daher nicht möglich, da sich in den unterschiedlichen Ebenen des \tilde{p}' -Rasters Teilchen mit sehr unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen. Möchte man Teilchen mit sehr hohen Energien, d. h. mit einer Geschwindigkeit $v' \approx c$ bis

zu einer Grenzenergie von z. B. 2 MeV sich in dem \tilde{p}' -Raster ausbreiten lassen, so muß sich der Zeitschritt an den schnellsten Teilchen orientieren, um die Courant-Friedrichs-Levi-Bedingung (3.4) zu erfüllen. Die CFL-Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Teilchen während eines Zeitschrittes nicht mehr als einen räumlichen Gitterabstand Δs zurücklegen:

$$\gamma \leq 1 \quad \text{mit} \quad \gamma = c \frac{\Delta t}{\Delta s} \quad (4.28)$$

Teilchen, die mit einer Geschwindigkeit von $v = 1$ AU/h fliegen, d. h. Protonen mit einer Energie von 9.2 MeV, unterliegen nun einem Zeitschritt Δt , der durch die schnellsten Teilchen mit einer Geschwindigkeit von $v \approx c$ vorgegeben wird und um den Faktor ≈ 7 kleiner ist als es die CFL-Bedingung für Teilchen mit $v = 1$ AU/h fordern würde.

Allein dieser Umstand verlangsamt die Berechnung um den Faktor 7 für Teilchen mit einer Geschwindigkeit von $v = 1$ AU/h. Dazu kommt noch der Faktor 32, da die Ausbreitung von Teilchen mit insgesamt 32 unterschiedlichen Energien berechnet werden muß. Berücksichtigt man außerdem, daß der s -Transport durch den Konvektionsterm aufwendiger wird und der p' -Transport längs der \tilde{p}' -Gitterpunkte durchzuführen ist, so ergibt sich ein zusätzlicher Rechenaufwand, der um den Faktor ≈ 450 größer ist, wie direkte Vergleiche der Laufzeiten der Programme ergeben haben. Das NGRF-Programm ist damit so rechenaufwendig, daß es nur auf besonders schnellen Rechnern wie z. B. einer DEC AlphaStation gerechnet werden kann. Daß es überhaupt in einer annehmbaren Zeit zu rechnen ist, liegt an dem Umstand, daß das GREF-Programm, auf dem es im wesentlichen basiert, numerische Lösungsmethoden benutzt, die sehr effizient sind, wie sich bereits in Abschnitt 3.4.3 beim direkten Vergleich mit einem anderen Programm gezeigt hat.

Die Unterschiede zwischen dem GREF- und dem NGRF-Programm liegen zum einen im s -Transport (siehe Abschnitt 4.5.1), der wegen der Konvektion abgeändert werden muß, und zum anderen im p' -Transport (siehe Abschnitt 4.5.2.1), der neu zu entwickeln ist. Dabei kann aber speziell bei dem p' -Transport auf RUFFOLO [1995] zurückgegriffen werden. Der von ihm konzipierte p' -Transport läßt sich abändern und weiterentwickeln.

Der μ' -Transport ist im wesentlichen identisch mit dem in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten μ -Transport. Es ist lediglich der Faktor v' der Geschwindigkeit zu berücksichtigen, da, wie oben bereits erwähnt, in Zeitschritten Δt gerechnet wird, so daß sich folgende zu lösende Gleichung ergibt:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mu'} \left(v' \frac{1 - \mu'^2}{2L(s)} F - \frac{3}{4} \frac{v'}{\lambda_{||}(s)} \bar{\kappa}(\mu') \frac{\partial F}{\partial \mu'} \right) = 0 \quad (4.29)$$

Das Aufspaltungsschema aus Abschnitt 3.2.3 kann ebenfalls übernommen werden, muß jedoch auf die drei Operatoren L_1, L_2 und L_3 erweitert werden, wobei der Operator L_3 den p' -Transport approximiert. Nach der Gleichung (3.87) ergibt sich somit:

$$L(t, s, \mu', p') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_2 + \frac{1}{2} L_3 + \frac{1}{2} L_3 + \frac{1}{2} L_2 + \frac{1}{2} L_1 + O((\Delta \tau)^2) \quad (4.30)$$

Wie zuvor beim GREF-Programm, haben auch Tests des Computerprogramms NGRF stattgefunden. Auf diese soll in Abschnitt 4.5.3 kurz eingegangen werden.

Abschließend kann gesagt werden, daß es sich bei dem NGRF-Programm um einen leistungsfähigen Algorithmus zur numerischen Berechnung der Lösungen der erweiterten Transportgleichung handelt, der in einigen Punkten, auf die in den folgenden Abschnitten eingegangen wird, eine Verbesserung des von RUFFOLO [1995] vorgestellten Lösungsverfahrens darstellt.

4.5.1 Der erweiterte s -Transport

Der s -Transport der erweiterten Transportgleichung wird erschwert durch den zusätzlich auftretenden Konvektionsterm, so daß folgende hyperbolische PDGl zu lösen ist:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(a(s)F) = 0 \quad \text{mit} \quad a(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mu'v' + \left(1 - \frac{(\mu'v')^2}{c^2}\right)v_{\text{sw}}^c(s) \quad (4.31)$$

Die PDGl ist in konservativer Form formuliert, hat im Gegensatz zu der Gleichung (3.2) einen von der Bogenlänge s abhängigen Koeffizienten $a(s)$. Der in Abschnitt 3.2.1.1 vorgestellte flux-corrected transport wurde jedoch vorausschauend so formuliert, daß die Erweiterung auf einen räumlich variablen Koeffizienten bereits berücksichtigt worden ist. Das gleiche gilt für das Fluxlimiter-Verfahren, das auch von dem allgemeineren Fall eines räumlich variablen Koeffizienten ausgeht. Dennoch ist Aufmerksamkeit geboten, wenn man das Vorzeichen des Koeffizienten $a(s)$ für einen bestimmten Rasterpunkt μ'_i des μ' -Gitters betrachtet. Speziell bei den negativen Rasterpunkten μ'_i , die vom Betrag her klein sind, kann es entlang der Bogenlänge s , d. h. entlang des räumlichen Rasters, zu einem Vorzeichenwechsel des Koeffizienten $a(s)$ kommen. Für den Transport der Teilchen, der durch Gleichung (4.31) ausgedrückt wird, bedeutet dies eine Umkehr der Ausbreitungsrichtung, da der Koeffizient $a(s)$ mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{\parallel} entlang der Magnetfeldlinie gleichzusetzen ist.

Physikalisch ist ein Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit v_{\parallel} so zu verstehen, daß Teilchen, die sich mit einem schwach negativen Pitchkosinus μ' ausbreiten und somit nur eine geringe Ausbreitungsgeschwindigkeit im mitbewegten Bezugssystem haben, durch die Konvektion, die mit zunehmendem radialen Abstand an Stärke gewinnt, in die von der Sonne abgewandte Richtung mitgeführt werden. Dies ist vergleichbar mit einem Läufer, der sich mit geringer Geschwindigkeit entgegengesetzt der Laufrichtung eines schnelleren Laufbandes bewegt und dadurch bezüglich eines festen Punktes im Laborsystem in Richtung des Laufbandes befördert wird.

Der Pitchkosinus μ'_0 , bei dem sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit v'_{\parallel} des Teilchens entlang der Magnetfeldlinie im mitbewegten Bezugssystem genau mit der Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c im korotierenden ortsfesten Bezugssystem aufhebt, kann für nichtrelativistische Teilchen folgendermaßen berechnet werden:

$$\mu'_0 = -\frac{v_{\text{sw}}^c}{v'} = -\frac{v_{\text{sw}}}{v'}\sqrt{1 + (\beta r)^2} \quad (4.32)$$

Zur besseren Veranschaulichung dieser Gleichung ist in der Abbildung 4.5 der Pitchkosinus μ'_0 (durchgezogene Kurve) in Abhängigkeit sowohl vom radialen Abstand r als auch von der Bogenlänge s aufgetragen worden. Die Geschwindigkeit der Teilchen entspricht Protonen von 3.5 MeV und hat den Wert $v = 0.62$ AU/h; für die radiale Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw} wird der typische Wert von $v_{\text{sw}} = 400$ km/s bzw. $v_{\text{sw}} = 0.0096$ AU/h angenommen. Der Funktionsverlauf ist monoton fallend und verdeutlicht somit die Zunahme des Betrags von μ'_0 mit dem radialen Abstand. Zusätzlich sind in der Abbildung die Gitterpunkte des μ' -Rasters als gestrichelte bzw. gepunktete Linien eingezeichnet, wie sie sich für ein typisches μ' -Raster von $I = 40$ Rasterpunkten ergeben. Für Pitchkosinuse mit $\mu' > 0$ ist die Ausbreitungsrichtung der Teilchen von der Sonne weggerichtet, was durch die gestrichelten Linien kenntlich gemacht wird. Betrachtet man jedoch die Ausbreitung der Teilchen entlang der Magnetfeldlinie mit einem Pitchkosinus von $\mu' = -0.025$, so ist deutlich zu erkennen, wie

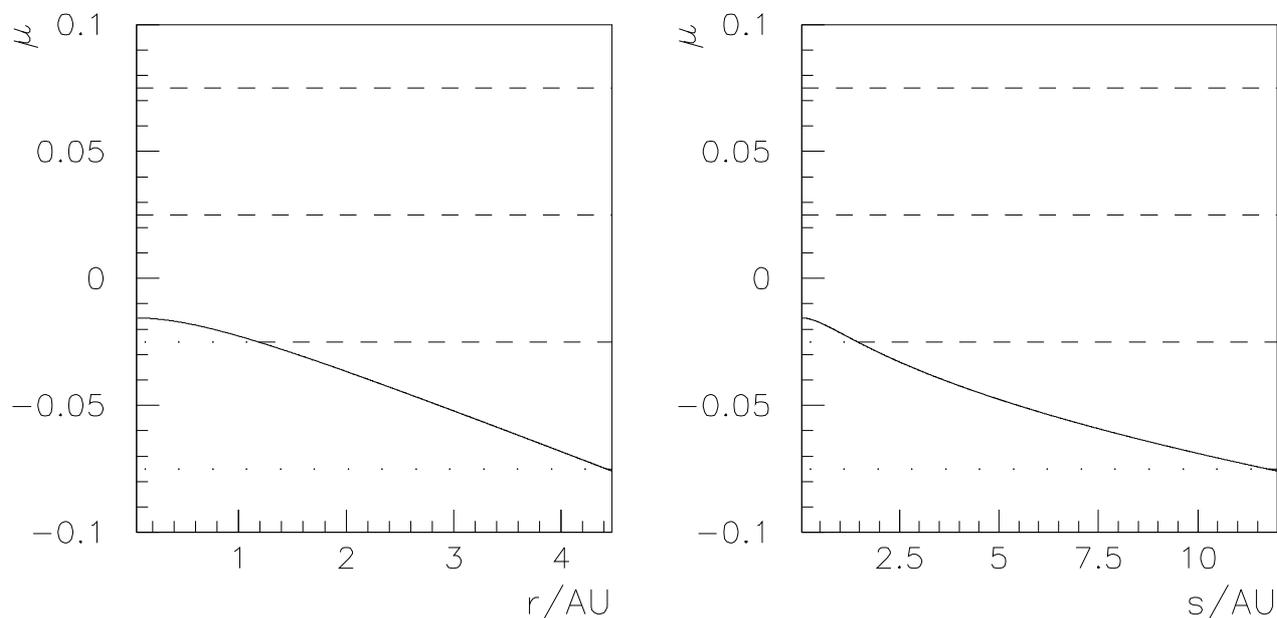


Abbildung 4.5: Die durchgezogene Kurve gibt den Pitchkosinus μ'_0 in Abhängigkeit vom radialen Abstand r (links) bzw. der Bogenlänge s entlang der Magnetfeldlinie an, bei dem ein Proton mit 3.5 MeV bezüglich des Ortes im korotierenden ortsfesten Bezugssystem ruht. Zusätzlich ist das μ' - s -Gitter eingetragen, auf dem sich die Teilchen oberhalb der durchgezogenen Kurve in den interplanetaren Raum (gestrichelte Kurven) und unterhalb der durchgezogenen Kurve zur Sonne hin bewegen (gepunktete Kurven).

diese Linie von der Funktion des Pitchkosinus μ'_0 geschnitten wird. Die Ausbreitungsrichtung ändert sich genau in diesem Punkt, wodurch die Inwärtsbewegung der Teilchen (gepunktete Linie) aufgrund der Konvektion in eine Auswärtsbewegung (gestrichelte Linie) umgekehrt wird. Selbst für den Pitchkosinus $\mu' = -0.075$ ändert sich noch für einen großen radialen Abstand $r \approx 4.5$ AU die Ausbreitungsrichtung.

Für das Differenzenverfahren bedeutet dies eine Umkehr der upwind-Richtung, um die Stabilität des Differenzenverfahrens zu wahren. Die Zelle, in die die Umkehr der Ausbreitungsrichtung fällt, gibt dabei Teilchen über beide Zellwände ab, ohne Teilchen hinzuzubekommen. Dies sollte natürlich langfristig zur Entleerung der Zelle führen, so daß schließlich negative Teilchendichten unvermeidbar wären. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeiten $v_{||}$ der Teilchen in der Nähe des Umkehrpunktes $v_{||} = 0$ jedoch sehr gering sind, erfolgt die Entleerung nur sehr langsam, so daß die Pitchwinkelstreuung genügend Teilchen in die Zelle einbringen kann, um eine Entleerung zu verhindern.

Abschließend muß noch auf die Wahl des Differenzenschemas eingegangen werden. Zur Auswahl stehen wiederum der FCT und das Fluxlimiter-Verfahren. Der FCT-Algorithmus ist zwar schneller, hat aber den Nachteil, daß sich für $\gamma \ll 1$ die unerwünschten "Terrassen" einstellen, wie bereits in Abschnitt 3.2.1.1 beschrieben. Da jedoch der Zeitschritt Δt durch die Teilchen mit der höchsten Ausbreitungsgeschwindigkeit $v \approx c$ festgelegt wird, kommt es gerade bei den Teilchen mit geringer Geschwindigkeit $v < c$ zu kleinen γ -Werten. So beträgt

z. B. für ein 3.5 MeV Proton, das einen Pitchkosinus von $\mu' = 1$ hat, der γ -Wert nur noch $\gamma \approx 0.1$. Ist der Pitchkosinus kleiner als eins, so verringert sich der γ -Wert natürlich noch weiter. Es ist daher angebracht, speziell für die Teilchen mit geringerer Geschwindigkeit das Fluxlimiter-Verfahren zu verwenden. Die numerische Diffusion nimmt zwar auch bei dem Fluxlimiter-Verfahren mit kleiner werdendem γ -Wert zu, ist aber noch deutlich geringer als bei der Verwendung des reinen upwind-Verfahrens.

Von der Verwendung des exakten Verfahrens, wie sie RUFFOLO [1991] vorschlägt und in RUFFOLO [1995] auch auf den räumlich abhängigen Koeffizienten $a(s)$ anwendet, ist abzuraten, da dieses Verfahren nur für einen räumlich konstanten Koeffizienten exakt ist und ansonsten zu unerwünschten numerischen Artefakten wie entleerten Zellen führt.

4.5.2 Der p' -Transport

4.5.2.1 Die Diskretisierung

Der Dezelerationsterm führt ebenfalls zu einer linearen PDGI erster Ordnung von hyperbolischem Typ

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{\tau_D} \frac{\partial}{\partial p'}(p'F) = 0 \quad (4.33)$$

$$\text{mit } \frac{1}{\tau_D} \stackrel{\text{def}}{=} v_{\text{sw}} \left[\frac{\sec(\Psi)}{2L(s)}(1 - \mu'^2) + \cos(\Psi) \frac{d}{dr}(\sec(\Psi)) \mu'^2 \right] \quad (4.34)$$

Wie schon bei den anderen hyperbolischen PDGIs ist es für die Auswahl des Differenzenverfahrens von besonderer Bedeutung, Kenntnis über den Verlauf der Charakteristiken in der t - p' -Ebene zu haben. Zu diesem Zweck wird die Dezelerationsgleichung (4.33) zunächst in eine einfachere Form gebracht:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} - \frac{1}{\tau_D} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{p}'} = 0 \quad \text{mit } \tilde{F} \stackrel{\text{def}}{=} p'F \quad \text{und } \tilde{p}' \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left(\frac{p'}{p'_0} \right) \quad (4.35)$$

Für die Charakteristiken ergibt sich folgende Bedingung:

$$\frac{dt}{dx} = 1 \quad \frac{d\tilde{p}'}{dx} = -\frac{1}{\tau_D} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\tilde{p}'} = -\tau_D \quad (4.36)$$

aus der die Charakteristiken als die Kurven

$$\tilde{p}' + \frac{t}{\tau_D} = \text{const} \quad (4.37)$$

hervorgehen. Durch die logarithmische Transformation des Impulses p' , der auf einen Referenzimpuls p'_0 bezogen ist, nehmen die Charakteristiken in einem halblogarithmischen Maßstab die einfache Gestalt von Geraden an. Dies vereinfacht die numerische Berechnung erheblich, da das upwind-Schema, auf dem sowohl der FCT als auch das Fluxlimiter-Verfahren aufbauen, sich den linearen Verlauf der Charakteristiken zunutze macht, wie in der Abbildung 3.1 deutlich gezeigt wird. Eine Berechnung der Dezelerationsgleichung auf einem \tilde{p}' -Gitter, das im halblogarithmischen Maßstab äquidistant mit dem Gitterabstand $\Delta\tilde{p}'$ ist, bietet sich daher an. Für die p' -Gitterpunkte folgen daraus Impulswerte, die durch eine Exponentialfunktion festgelegt werden:

$$p'_k = p'_0 \cdot \exp(k \cdot \Delta\tilde{p}') \quad k = 0, 1, \dots, K \quad (4.38)$$

Der Referenzimpuls p'_0 wird dabei so gewählt, daß er mit dem Impulswert des untersten Gitterpunktes zusammenfällt.

Betrachtet man die Gleichung (4.35), so ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, daß sie bezüglich der Größe \tilde{F} formuliert ist und nicht bezüglich der für die erweiterte Transportgleichung wichtigen Verteilungsfunktion F . Rechnet man jedoch die Gleichung (4.37) der Charakteristiken in die Form

$$p' \exp\left(\frac{t}{\tau_D}\right) = \text{const} \quad (4.39)$$

um, so kann die Lösung der Gleichung (4.35) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\tilde{F}(t, p') = \tilde{F}_0\left(p' \exp\left(\frac{t}{\tau_D}\right)\right) = p' \exp\left(\frac{t}{\tau_D}\right) F_0\left(p' \exp\left(\frac{t}{\tau_D}\right)\right) \quad (4.40)$$

Durch Kürzen von p' erhält man schließlich die Lösung der Dezelerationsgleichung

$$F(t, p') = \exp\left(\frac{t}{\tau_D}\right) F_0\left(p' \exp\left(\frac{t}{\tau_D}\right)\right) \quad (4.41)$$

bzw. nach der logarithmischen Transformation des Impulses in der Form:

$$F(t, \tilde{p}') = \exp\left(\frac{t}{\tau_D}\right) F_0\left(\tilde{p}' + \frac{t}{\tau_D}\right) \quad (4.42)$$

Die Lösung der Dezelerationsgleichung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ kann aus der Lösung zum Zeitpunkt t bestimmt werden

$$F(t + \Delta t, \tilde{p}') = \exp\left(\frac{\Delta t}{\tau_D}\right) F\left(t, \tilde{p}' + \frac{\Delta t}{\tau_D}\right) \quad (4.43)$$

so daß es möglich ist, beginnend mit der Anfangsbedingung $F_0(\tilde{p}')$ die Lösung jeweils für einen Δt -Schritt numerisch zu berechnen, um so schließlich nach n Schritten die Lösung zum Zeitpunkt $t = n \cdot \Delta t$ zu erhalten. Zur numerischen Umsetzung bieten sich der FCT und das Fluxlimiter-Verfahren an (siehe Abschnitt 3.2.1.1), da beide Verfahren im günstigsten Fall von zweiter Konvergenzordnung sind.

Für das numerische Problem kommt erschwerend die Anfangsbedingung hinzu, die einem Potenzgesetz im Impuls entspricht

$$F_0(p') = B \left(\frac{p'}{p'_0}\right)^{-\delta'} \quad (4.44)$$

so daß sich im halblogarithmischen Impulsmaßstab ein Exponentialverlauf

$$F_0(\tilde{p}') = B \exp(-\delta' \tilde{p}') \quad (4.45)$$

ergibt. Die Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit dem Transport einer "Exponentialwelle" auftreten, werden in der Abbildung 3.2 dargestellt und zeigen deutlich die Überlegenheit der Fluxlimiter-Methode für die hier auftretenden kleinen γ -Werte, d. h.

$$\gamma(s, \mu) \ll 1 \quad \text{mit} \quad \gamma(s, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta t}{|\tau_D(s, \mu)| \Delta \tilde{p}'} \quad (4.46)$$

Es wäre wünschenswert, γ -Werte mit einem Betrag von ≈ 1 zu haben, da das upwind-Verfahren für $\gamma = 1$ exakt ist, so daß die Diskretisierungsfehler und damit auch die numerische Diffusion identisch verschwinden. Dies ist aber nicht möglich, da die Auflösung des zeitlichen Gitters durch die CFL-Stabilitätsbedingung (3.4) des s -Transportes festgelegt ist und in der Regel den kleinen Wert von $\Delta t = 0.01$ h besitzt. Eine Verfeinerung des \tilde{p}' -Gitters ist wegen des damit verbundenen Rechenaufwands nicht beliebig möglich, so daß sich typischerweise eine Gitterweite von $\Delta\tilde{p}' = 0.14$ ergibt. Demgegenüber steht die große Zeitkonstante $\tau_D(s, \mu)$, die speziell für große radiale Abstände vom Betrag her große Werte annimmt, so daß besonders in diesen räumlichen Bereichen sehr kleine γ -Werte erreicht werden. Der Zeitschritt Δt kann nicht optimal an die auf Zeitskalen von Stunden verlaufende adiabatische Dezeleration angepaßt werden.

Überlegungen, ein exaktes Verfahren zu konstruieren, indem der Zeitschritt Δt so angepaßt wird, daß die Teilchen um Vielfache des Gitterabstandes $\Delta\tilde{p}'$ transportiert werden, erübrigen sich, da $\tau_D(s, \mu)$ keine Konstante ist. Dennoch ist es RUFFOLO [1995] gelungen, ein exaktes Verfahren auf andere Art und Weise zu konstruieren. Trägt man eine Potenzfunktion in doppellogarithmischem Maßstab auf, so erhält man eine Gerade. Für einen linearen Funktionsverlauf ist das upwind-Verfahren jedoch exakt, da die Funktionswerte auf der n -ten Zeitschicht linear interpoliert werden. Führt man das upwind-Verfahren in einem doppellogarithmischen Maßstab aus, d. h. interpoliert man auf der n -ten Zeitschicht mit einem Potenzgesetz statt mit einem linearen Funktionsverlauf, so erhält man ein Differenzenverfahren, welches für die Anfangsbedingung eines Potenzgesetzes zu einem exakten Verfahren führt. RUFFOLO [1995] bezeichnet diese Methode als *geometrische Interpolation*. Sie läßt sich als Differenzenverfahren folgendermaßen schreiben:

$$F_k^{n+1} = (F_{k+1}^n)^\gamma (F_k^n)^{1-\gamma} \quad \text{für } \tau_D > 1 \quad (4.47)$$

$$\text{bzw. } F_k^{n+1} = (F_{k-1}^n)^\gamma (F_k^n)^{1-\gamma} \quad \text{für } \tau_D < 1 \quad (4.48)$$

Nachteile dieses Verfahrens sind der durch das Potenzieren bedingte hohe Rechenaufwand und die Tatsache, daß das Verfahren für allgemeine Funktionsverläufe nicht konservativ, d. h. teilchenzahlerhaltend, ist. Dies dürfte RUFFOLO [1995] dazu veranlaßt haben, die Interpolation nicht auf der n -ten Zeitschicht vorzunehmen, sondern auf der Kurve eines konstanten $\tau = v \cdot t$, d. h. der zurückgelegten Strecke der Teilchen. Der Verlauf eines Potenzgesetzes im Impuls bleibt nämlich nur für den hier separat betrachteten p' -Transport erhalten. Berücksichtigt man zusätzlich, daß die Teilchen sich noch entlang der räumlichen Koordinate ausbreiten und dem μ' -Transport unterworfen sind, so ergeben sich speziell in der Anfangsphase des Ereignisses Impulsverteilungen, die keine Potenzgesetze sind, da die Impulsverteilungen durch die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten auf den p' -Ebenen geprägt sind. Interpoliert man dennoch die Impulsverteilung mit einem Potenzgesetz, so kommt es zu ungewollten Teilchenflüssen. Die Interpolation auf Kurven mit konstantem τ umgeht zwar dieses Problem, ist aber unter Berücksichtigung des Aufspaltungsschemas nicht angemessen, da die Interpolation auf der halben Zeitschicht wie beim s - und μ' -Transport erfolgen sollte, um synchron mit dem s - und μ' -Transport zu verlaufen. Auf weitere Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit der Interpolation auf konstanten τ -Kurven auftreten, wird bei RUFFOLO [1995] hingewiesen.

Benutzt man hingegen die geometrische Interpolation auf einer konstanten Zeitschicht mit einem hinreichend feinen \tilde{p}' -Gitter, z. B. $\Delta\tilde{p}' = 0.14$, so unterscheiden sich die erzielten

numerischen Lösungen der erweiterten Transportgleichung nur äußerst geringfügig von den Ergebnissen, die sich mit der Fluxlimiter-Methode erzielen lassen, obwohl die Teilchenzahlerhaltung im allgemeinen nicht gilt. Auf den relativ dicht beieinanderliegenden \tilde{p}' -Gitterpunkten läßt sich die Lösung gut intervallweise durch Potenzfunktionen approximieren, so daß die Interpolation durch Potenzfunktionen gerechtfertigt ist.

In dieser Arbeit soll dennoch dem Fluxlimiter-Verfahren der Vorzug gegeben werden, da es die Teilchenzahlerhaltung auch dann garantiert, wenn das Impulsspektrum von einem Potenzgesetz abweicht. So können Impulsspektren mit beliebigen Verläufen vorgegeben werden, was besonders dann von Interesse ist, wenn das Impulsspektrum über einen großen Impulsbereich berechnet werden soll.

Der Gitterabstand $\Delta\tilde{p}'$ sollte dabei möglichst klein gewählt werden, um den Funktionsverlauf im Impuls möglichst gut zu approximieren. Ein weiteres Problem bei zu großen Gitterabständen ergibt sich daraus, daß die Lösung, nachdem sie mit dem Fluxlimiter-Verfahren um einen Zeitschritt vorangeführt worden ist, noch entsprechend der Gleichung (4.43) mit dem Faktor $\exp(\Delta t/\tau_D)$ zu multiplizieren ist. Ist das \tilde{p}' -Raster zu grob, so kann es durch die schlechte Approximation des Fluxlimiter-Verfahrens und die anschließende Multiplikation mit dem Faktor $\exp(\Delta t/\tau_D)$ zu einem Ansteigen der Funktionswerte über alle Schranken führen, ohne daß dies eine Eigenschaft der analytischen Lösung ist.

4.5.2.2 Die äußere Grenze

Wie schon beim s -Transport stellt sich bei der numerischen Lösung einer hyperbolischen PDGl die Frage nach der passenden Umsetzung der Randbedingung. Da die Teilchen durch die adiabatische Dezeleration einen Energieverlust erleiden und somit auf den Charakteristiken von hohen zu niedrigen Energien wandern, ist nur die obere Grenze von Bedeutung. Die Teilchen, die die untere Grenze überschreiten, verlassen lediglich das Simulationsgebiet, ohne den weiteren zeitlichen Verlauf der numerischen Lösung zu beeinflussen.

Der unterste \tilde{p}' -Gitterpunkt des NGRF-Programms wurde für Protonen bei einem Impuls p_0 entsprechend der Energie von 2 MeV festgelegt. Es können somit die Auswirkungen der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration für Protonen des gesamten gemessenen Energiebereichs des E6-Experiments berechnet werden. Für die höchsten \tilde{p}' -Gitterpunkte ergibt sich bei einem \tilde{p}' -Gitter mit 32 Rasterpunkten und einem Gitterabstand von $\Delta\tilde{p}' = 0.14$ eine Energie von 3.9 GeV und eine Ausbreitungsgeschwindigkeit für Protonen von $v = 7.06$ AU/h. Protonen dieser Energie fliegen annähernd mit Lichtgeschwindigkeit von $c = 7.2$ AU/h, so daß eine weitere Erhöhung der Energie der Protonen nur einen unwesentlichen Geschwindigkeitszuwachs mit sich bringt. Die Teilchen breiten sich somit auf den höchsten \tilde{p}' -Rasterpunkten mit annähernd gleicher Geschwindigkeit aus, so daß die Anfangsbedingung im Impuls nur durch den Dezelerationsterm verändert wird, da die Veränderungen im s - und p' -Transport gleichförmig stattfinden. Für eine Anfangsbedingung, die einem Potenzgesetz entspricht, bedeutet dies, daß das Potenzgesetz in den höchsten Rasterpunkten erhalten bleibt. Es bietet sich daher eine Extrapolation des Funktionswertes des höchsten \tilde{p}' -Gitterpunktes mit einer Potenzfunktion an, so daß sich der Funktionswert während eines Zeitschrittes Δt folgendermaßen verändert:

$$u_K^{n+1} = \exp\left(\frac{\Delta t}{\tau_D}(1 - \delta')\right) u_K^n \quad \text{für } \tau_D > 1 \quad (4.49)$$

Anhand dieser Gleichung ist auch sofort abzulesen, daß ein Potenzgesetz mit $\delta' = 1$ von dem

p' -Transport, der analytischen Lösung entsprechend, nicht verändert wird.

Neben dieser mathematisch korrekten Behandlung der oberen Grenze gibt es noch zwei Argumente, die die geringe Bedeutung der Randbedingung an der oberen Grenze für Teilchen mit Ausbreitungsgeschwindigkeiten deutlich unterhalb der Lichtgeschwindigkeit belegen:

1. Für eine Anfangsbedingung mit einem relativ steilen Potenzgesetz (z. B. $\delta' = 5$) nimmt die Anzahl der Teilchen mit wachsendem Impuls sehr schnell ab. Zudem macht sich der Einfluß der Teilchen mit hoher Energie entsprechend der sehr großen Zeitkonstante τ_D erst in der Spätphase eines Ereignisses in den niedrigen Energien bemerkbar. Dementsprechend gering ist die Bedeutung der relativ wenigen Teilchen in den höchsten Gitterpunkten für die zeitliche Entwicklung der numerischen Lösung auf den Gitterpunkten mit den niedrigsten Impulsen. So haben z. B. die 16 höchsten Gitterpunkte nur einen äußerst geringen Einfluß auf die numerische Lösung für Protonen von 2 MeV, falls die Gitterweite $\Delta\tilde{p}' = 0.14$ und der Koeffizient des Potenzgesetzes $\delta' = 5$ beträgt, wie ein Vergleich der numerischen Lösung mit bzw. ohne die 16 höchsten \tilde{p}' -Gitterpunkte ergeben hat.
2. Die Bedeutung des Dezelerationsterms (und auch des Konvektionsterms) in der erweiterten Transportgleichung nimmt mit steigender Geschwindigkeit v ab, da sowohl der Advektionsterm als auch der Fokussierungs- und der Streuterm mit der Geschwindigkeit skaliert sind. Die Bedeutung der äußeren Randbedingung des p' -Transports für die Lösung der erweiterten Transportgleichung wird damit natürlich auch geringer.

Anders ist hingegen die Situation bei der Berechnung der erweiterten Transportgleichung für Elektronen, die bereits bei Teilchenenergien von einigen MeV wegen ihrer geringen Masse Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit erreichen. Bei Elektronen im MeV-Bereich ist daher sehr wohl auf die mathematisch korrekte Umsetzung der äußeren Randbedingung des p' -Transports zu achten.

4.5.3 Test des Computerprogramms NGREF

Bei dem Computerprogramm NGREF handelt es sich um eine Erweiterung des zur Berechnung der numerischen Lösungen der Transportgleichung (2.58) geschriebenen Programms GREF. Selbst wenn man von einem fehlerfreien GREF-Programm ausgeht, machen es die umfangreichen Änderungen und Erweiterungen nötig, auch das NGREF-Programm ausgiebig zu testen.

Dabei bietet es sich zunächst an, die numerischen Lösungen des GREF-Programms bei gleichen Ausbreitungsbedingungen mit den Lösungen des NGREF-Programms für eine identisch verschwindende radiale Sonnenwindgeschwindigkeit $v_{sw} = 0$ zu vergleichen. In diesem Fall sollten die Lösungen übereinstimmen, da die erweiterte Transportgleichung (4.1) für $v_{sw} = 0$ in die Transportgleichung (2.58) übergeht. Vergleiche dieser Art sind für unterschiedliche Ausbreitungsbedingungen erfolgreich durchgeführt worden.

Ein Test der zusätzlich eingebauten Terme der erweiterten Transportgleichung hat damit aber noch nicht stattgefunden. Da speziell der p' -Transport eine grundlegende Erweiterung gegenüber der ursprünglichen Transportgleichung darstellt, sollte ein gesonderter Test des p' -Transports durchgeführt werden. Wie bereits erwähnt wurde, entspricht ein Potenzgesetz

im logarithmischen Impulsmaßstab einer Exponentialfunktion. Der Transport dieser “Exponentialwelle” läßt sich mit der analytischen Lösung

$$F(\tilde{p}') = B \exp\left(-(\delta' - 1)\frac{t}{\tau_D}\right) \exp(-\delta' \tilde{p}') \quad (4.50)$$

vergleichen, die unmittelbar aus der Gleichung (4.41) folgt. Bis auf den inhärenten Approximationsfehler des Fluxlimiter-Verfahrens, der sich bei kleinen γ -Werten bemerkbar macht, ist eine gute Übereinstimmung zwischen der numerischen und der analytischen Lösung zu verzeichnen (vergleiche hierzu auch Abbildung 3.2).

Ein Test mit einer analytischen Lösung der erweiterten Transportgleichung, der das vollständige Differenzenverfahren des NGRF-Programms überprüfen könnte, läßt sich leider wegen der Komplexität der erweiterten Transportgleichung, die es selbst für Spezialfälle nicht gestattet, analytische Lösungen zu finden, nicht durchführen. Einen Ausweg bietet jedoch, wie schon bei der ursprünglichen Transportgleichung (siehe Abschnitt 3.4.2) die Überprüfung der numerischen Lösungen mit Hilfe des steady-state-Theorems, das seine Gültigkeit auch für die exakten Lösungen der erweiterten Transportgleichung beibehält. Die über die Zeit aufsummierten Pitchwinkelverteilungen der numerischen Lösung müssen demnach proportional zu der numerisch berechneten stationären Lösung sein. Dies sollte für die numerischen Lösungen für unterschiedliche Impulse gelten. Der Test soll hier jedoch exemplarisch für Protonen mit einer Energie von 3.5 MeV durchgeführt werden. Bei dieser relativ geringen Energie sind die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration bereits hinreichend stark ausgeprägt, so daß auch tatsächlich die Zusatzterme der erweiterten Transportgleichung überprüft werden können.

Dennoch gibt es leichte Unterschiede zu dem in Abschnitt 3.4.2 durchgeführten Test. So wird die Summationszeit für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.1$ AU auf $t_{\max} = 192$ h bzw. $\tau_{\max} = 119$ AU und für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU auf $t_{\max} = 96$ h bzw. $\tau_{\max} = 57$ AU festgelegt. Diese im Vergleich zu den in Abschnitt 3.4.2 deutlich geringeren Summationszeiten lassen sich mit dem steilen Abfall der omnidirektionalen Intensität in der Spätphase des Ereignisses rechtfertigen. Dadurch, daß die omnidirektionale Intensität g_0 und damit auch die anderen Legendre-Koeffizienten g_n mit $n > 1$ im zeitlichen Verlauf schneller gegen null streben als es sich ohne die Effekte der Konvektion und adiabatischen Dezeleration ergeben würde, konvergieren die Summen über die Legendre-Koeffizienten schneller gegen einen Grenzwert, so daß die Summationszeit reduziert werden kann, ohne einen großen Fehler zu verursachen. Wegen der Gültigkeit des steady-state-Theorems für die exakten Lösungen der erweiterten Transportgleichung folgt daraus aber auch, daß sich die stationären Lösungen entsprechend schneller einstellen.

Dies ist rechentechnisch gesehen von großem Vorteil, da die so eingesparte Rechenzeit den hohen Rechenaufwand des NGRF-Programms zumindest etwas kompensieren kann. Aus der reduzierten Summationszeit folgt indirekt, daß die äußere Grenze von $s_b = 24$ AU auf $s_b = 12$ AU verringert werden kann. Bedingt durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Information, die durch die reine Flugzeit der Teilchen zur äußeren Grenze und zurück begrenzt wird, bedeutet ein schnelleres Abfallen der omnidirektionalen Intensität in der Spätphase des Ereignisses auch einen geringeren Einfluß der äußeren Grenze auf die aufsummierte Pitchwinkelverteilung bzw. die Pitchwinkelverteilung der stationären Lösung. Je größer der Abstand der äußeren Grenze vom Beobachter ist, desto später macht sich die äußere Randbedingung in der numerischen Lösung am Ort des Beobachters bemerkbar.

$\lambda_r = 0.1 \text{ AU}, \hat{q} = 1.6, H = 0, \hat{\sigma} = 0$						
	$r = 0.3 \text{ AU} (s = 0.305 \text{ AU})$			$r = 1 \text{ AU} (s = 1.165 \text{ AU})$		
	stationär	Theorem	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %	stationär	Theorem	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %
ξ_{1s}	0.4944427	0.4951790	0.149	0.2612706	0.2614390	0.065
ξ_{2s}	0.0670149	0.0671657	0.225	0.0125448	0.0125648	0.159
ξ_{3s}	-0.1486538	-0.1488570	0.137	-0.0829126	-0.0829632	0.006
ξ_{4s}	-0.0234200	-0.0234625	0.181	-0.0043711	-0.0043748	0.009

$\lambda_r = 0.4 \text{ AU}, \hat{q} = 1.6, H = 0, \hat{\sigma} = 0$						
	$r = 0.3 \text{ AU} (s = 0.305 \text{ AU})$			$r = 1 \text{ AU} (s = 1.165 \text{ AU})$		
	stationär	Theorem	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %	stationär	Theorem	$\Delta\xi_{ns}/\xi_{ns}$ in %
ξ_{1s}	1.409716	1.417340	0.541	0.790152	0.791495	0.170
ξ_{2s}	0.678212	0.681814	0.531	0.136008	0.136312	0.223
ξ_{3s}	-0.120765	-0.121381	0.510	-0.227896	-0.228276	0.167
ξ_{4s}	-0.151418	-0.152128	0.469	-0.046832	-0.046930	0.210

Tabelle 4.1: Die nach Abschnitt 3.3 berechneten stationären Anisotropien und die durch die Anwendung des steady-state-Theorems aus Abschnitt 2.2.3 berechnete stationäre Anisotropie sind zusammen mit ihrer relativen Abweichung voneinander aufgelistet. Die numerischen Lösungen sind unter Berücksichtigung der Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration für Protonen mit 3.5 MeV berechnet worden. Dabei wurde eine radiale Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 400 \text{ km/s}$ und ein Potenzgesetz im Impuls mit $\delta' = 5$ für die Injektionsfunktion zugrundegelegt. Der Aufbau der Tabelle ist identisch mit dem der Tabelle 3.3.

Sowohl die δ -Injektion als auch die Form des Pitchwinkelstreuoeffizienten mit $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ sind identisch mit den in Abschnitt 3.4.2 verwendeten Parametern. Auch der Aufbau der Tabellen 3.3 und 4.1 ist derselbe.

Betrachtet man nun die relativen Abweichungen, so stellt man fest, daß diese sowohl für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.1 \text{ AU}$ (oberer Teil der Tabelle) als auch für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.4 \text{ AU}$ (unterer Teil der Tabelle) unter der 1 %-Grenze bleiben. Dabei ist zu unterscheiden zwischen den Werten, die sich für einen radialen Abstand von $r = 0.3 \text{ AU}$ (linke Hälfte der Tabelle) und einen radialen Abstand von $r = 1 \text{ AU}$ (rechte Hälfte der Tabelle) ergeben. So liegen die relativen Abweichungen bei $r = 0.3 \text{ AU}$ systematisch über denen bei $r = 1 \text{ AU}$. Dies steht in Übereinstimmung mit dem in Abschnitt 3.4.2 durchgeführten Test des GREF-Programms. Der Grund ist auch hier die sich mit geringem radialen Abstand räumlich und zeitlich stark ändernde Lösung. Dabei erreichen die relativen Abweichungen für $r = 1 \text{ AU}$ jedoch nicht die äußerst geringen Werte des GREF-Tests von $< 0.003 \%$.

Betrachtet man die Komplexität des Differenzenverfahrens zur Lösung der erweiterten Transportgleichung, so ist eine maximale relative Abweichung von $< 1 \%$ ein erstaunlich gutes Ergebnis. Bei der Approximation der erweiterten Transportgleichung handelt es sich um ein Problem, das um eine Dimension komplexer ist als die Approximation der ursprünglichen Transportgleichung. Für das Aufspaltungsschema bedeutet dies eine Verkettung von drei statt

von zwei Differenzenoperatoren, wodurch der Approximationsfehler bei gleicher Zeitschrittweite ansteigt. Im Gegensatz zum GREF-Programm ist der Zeitschritt Δt jedoch kleiner geworden, wodurch einerseits der Approximationsfehler des Aufspaltungsschemas reduziert wird, andererseits aber eine verstärkte numerische Diffusion in dem s - und p' -Transport auftritt, da eine optimale Anpassung des Zeitschrittes nicht möglich ist. Als Resultat dieser gegensätzlichen Auswirkungen ergibt sich eine insgesamt geringe maximale relative Abweichung, die aber nicht den extrem niedrigen Wert des GREF-Programms bei $r = 1$ AU erreicht.

Der Test des NGREEF-Programms mit Hilfe des steady-state-Theorems ist somit erfolgreich durchgeführt worden. Daraus kann auf eine sehr gute zeitliche Approximation des NGREEF-Programms geschlossen werden.

4.6 Ausgewählte Lösungen

Nachdem in den Abschnitten 4.3 und 4.4 die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration sowohl in ihrer physikalischen Bedeutung als auch in der numerischen Umsetzung jeweils separat betrachtet worden sind, wird in diesem Abschnitt das Zusammenwirken beider Effekte in der erweiterten Transportgleichung untersucht.

4.6.1 Die zeitabhängigen Lösungen

Zu diesem Zweck sollen zunächst zeitabhängige Lösungen von Protonen mit einer Energie von 3.5 MeV, d. h. einer Geschwindigkeit von $v = 0.62$ AU/h, bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU betrachtet werden. Um die Ausbreitung der Protonen sowohl bei starker als auch bei schwacher Streuung untersuchen zu können, sind die Lösungen für radiale mittlere freie Weglängen von $\lambda_r = 0.1$ AU (Abbildungen 4.6 und 4.7) und von $\lambda_r = 0.4$ AU (Abbildungen 4.8 und 4.9) berechnet worden. Die mittlere freie Weglänge wird dabei als unabhängig vom Impuls bzw. der magnetischen Steifigkeit (siehe Gleichung (1.6)) angenommen. Dies ist natürlich eine vereinfachte Modellannahme, da die mittlere freie Weglänge über den im Modell betrachteten Impulsbereich von 2 MeV–3.9 GeV nicht konstant ist. Andererseits sind die numerischen Lösungen für Energien von einigen MeV nur äußerst geringfügig von den Ausbreitungsbedingungen der Teilchen bei einigen hundert MeV abhängig, solange das Energiespektrum hinreichend steil ist. Auf diesen Umstand wurde bereits in Abschnitt 4.5.2.2 im Zusammenhang mit dem Einfluß der äußeren Grenze des p' -Transportes hingewiesen.

In den Abbildungen 4.6 und 4.8 sind die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_n bis zur vierten Ordnung im zeitlichen Verlauf aufgetragen. Es wird dabei zwischen den Lösungen für eine identisch verschwindende (durchgezogene Kurven) und eine typische Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 400$ km/s (gestrichelte Kurven) unterschieden.

Die weiteren Ausbreitungsbedingungen sowohl für die in Abbildung 4.6 als auch in Abbildung 4.8 gezeigten Lösungen sind identisch: Die Protonen werden mit einem Reid-Axford-Profil mit den Parametern $t_A = 0.5$ h und $t_V = 2$ h (vgl. Abbildung 3.5) bei einem radialen Abstand von $r = 0.05$ AU injiziert. Die Impulsverteilung der injizierten Protonen entspricht dabei einem Potenzgesetz mit $\delta' = 5$, d. h. für nichtrelativistische Energien einem Energiespektrum von $\gamma' = 2.5$. Der PWSK ist durch die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ festgelegt, d. h. der PWSK ist symmetrisch und besitzt ein ausgeprägtes "resonance gap". Die äußere Grenze befindet sich bei einem radialen Abstand von $s_b = 12$ AU, wodurch gewährleistet ist, daß die äußere Randbedingung einen geringen Einfluß auf die hier betrachteten

Lösungen bei $r = 1$ AU hat.

Betrachtet man zunächst die Gemeinsamkeiten der durchgezogenen und gestrichelten Kurven in den Abbildungen 4.6 und 4.8, so ist deutlich zu erkennen, wie die omnidirektionale Intensität g_0 in ihrem zeitlichen Verlauf durch die radiale mittlere freie Weglänge λ_r geprägt wird. Das omnidirektionale Intensitätsprofil in der Abbildung 4.6, d. h. für $\lambda_r = 0.1$ AU, besitzt ein diffusives Profil, das sich mit dem Profil des Kopfbereiches eines Pottwales vergleichen läßt. Die Teilchen benötigen eine gewisse Zeit, um die Strecke zwischen Quelle und Beobachter zurückzulegen, so daß die omnidirektionale Intensität abrupt um mehrere Größenordnungen ansteigt. Nach dem Erreichen eines relativ flachen Maximums schwächt sich die omnidirektionale Intensität allmählich wieder ab.

Das Maximum der omnidirektionalen Intensitätsprofils bei einer radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU ist hingegen deutlicher ausgeprägt, wie in Abbildung 4.8 zu erkennen ist. Auch ist die darauffolgende monotone Abnahme der omnidirektionalen Intensität schneller als in Abbildung 4.6. Aufgrund des relativ großen Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ sind selbst bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU noch die Ansätze eines *kohärenten Pulses* zu erkennen, bei dem die Teilchen, bedingt durch die starke Fokussierung, räumlich in einem Pulk zusammengehalten werden, der sich durch eine Gaußglockenkurve annähern läßt. Diese Gaußglockenkurve wandert zeitlich nach außen und zerfließt dabei unsymmetrisch. Dieses Zerfließen ist besonders auf der zur Sonne gerichteten Flanke stärker ausgeprägt (siehe EARL [1974]; EARL [1976]; RUFFOLO AND KHUMLUMBERT [1995]). Wandert nun dieser Puls bei $r = 1$ AU über den Beobachter hinweg, so ist zumindest in der Anfangsphase des Ereignisses dieses räumliche Profil als zeitliches Profil der omnidirektionalen Intensität wiederzuerkennen.

In den Anisotropien ξ_n ist gleichzeitig mit der Ankunft der ersten Teilchen ein steiler Anstieg zu verzeichnen, der aber bereits vor dem Erreichen des Maximums in der omnidirektionalen Intensität seinen Höhepunkt erreicht, so daß die Anisotropien schließlich für große Zeiten nur geringfügig von null verschiedene Werte annehmen. Die hohen Anisotropien in der Anfangsphase des Ereignisses sind ein Ausdruck für die stark gebündelten Pitchwinkelverteilungen. Die ersten Teilchen kommen fast ausschließlich aus der Richtung der Sonne und haben zudem einen Pitchkosinus von $\mu \approx 1$, da es sich um die Teilchen handelt, die die Strecke Sonne–Beobachter am schnellsten zurückgelegt haben. Im weiteren Verlauf erreichen auch die Teilchen mit einem Pitchkosinus von $\mu < 1$ den Beobachter; hierbei handelt es sich in der Regel um Teilchen, deren Pitchkosinus bereits durch die Pitchwinkelstreuung beeinflusst worden ist, da die Teilchen ausschließlich in den positiven Halbraum ($\mu \geq 0$) injiziert werden. Zusätzlich kommen auch Teilchen aus der von der Sonne abgewandten Richtung mit einem Pitchkosinus von $\mu < 0$, die den Beobachter bereits passiert hatten, dann aber durch Pitchwinkelstreuung ihre Ausbreitungsrichtung umgekehrt haben. Die Anisotropien nehmen ab; die PWV wird somit immer isotroper.

Eine besondere Form nimmt die Kurve der Anisotropie dritter Ordnung ξ_3 an, da es im weiteren zeitlichen Verlauf nach zunächst positiven zu deutlich negativen Werten kommt. Grund hierfür ist das “resonance gap” des PWSK, das der PWV wegen der geringen Streuung um $\mu = 0$ einen S-förmigen Verlauf aufprägt, der sich bei der Entwicklung nach Legendre-Polynomen durch einen negativen Legendre-Koeffizienten dritter Ordnung bemerkbar macht (vgl. Abschnitt 5.3.1).

Die bisher beschriebenen Gemeinsamkeiten zwischen den Lösungen mit und ohne die Effekte der Konvektion und adiabatischen Dezeleration zeigen, daß das grobe Profil der Kurven das gleiche bleibt. Die durch die Sonnenwindgeschwindigkeit bedingten Effekte sind für Pro-

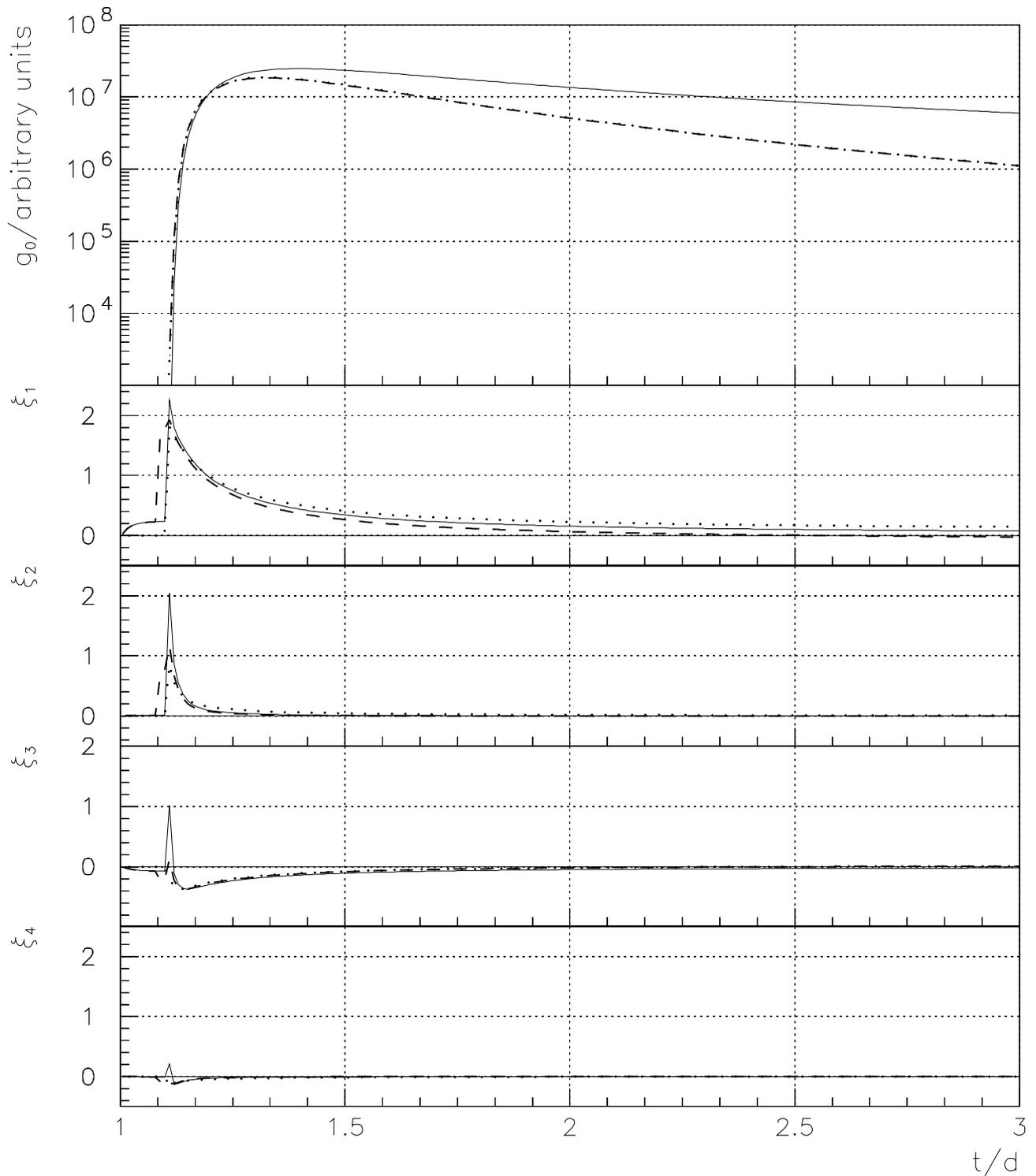


Abbildung 4.6: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_1 – ξ_4 sind für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.1$ AU bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU für Protonen von 3.5 MeV über der Zeit aufgetragen (weitere Ausbreitungsbedingungen siehe Text). Die durchgezogenen bzw. gestrichelten Kurven entsprechen der numerischen Lösung ohne bzw. mit den Effekten der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration. Die gepunkteten Kurven sind die Compton-Getting-transformierte Lösung aus dem mitbewegten Bezugssystem (gestrichelte Kurven) in das korotierende ortsfeste Bezugssystem.

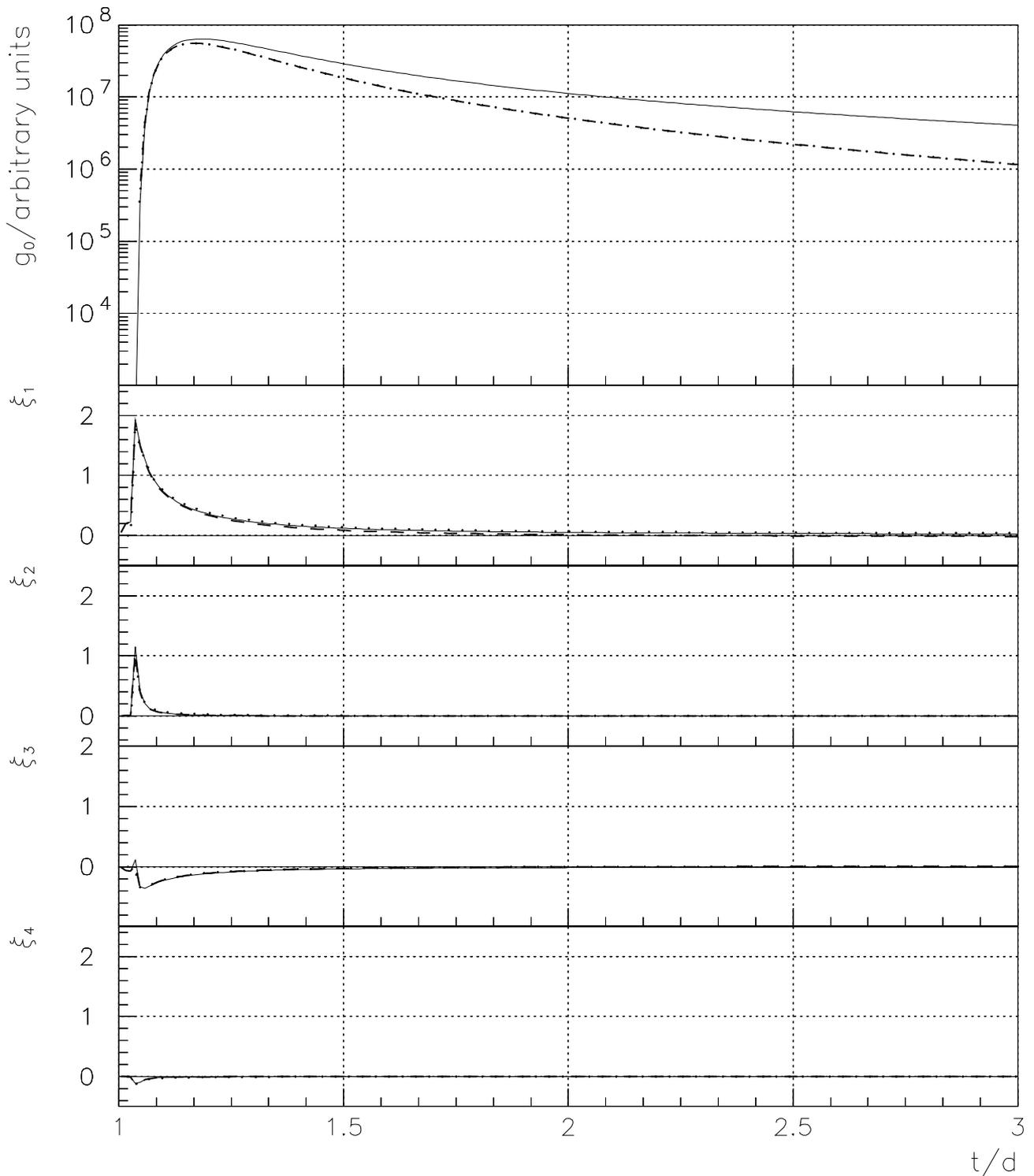


Abbildung 4.7: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_1 – ξ_4 sind für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.1$ AU bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU für Protonen von 32.4 MeV über der Zeit aufgetragen (weitere Ausbreitungsbedingungen siehe Text). Die durchgezogenen bzw. gestrichelten Kurven entsprechen der numerischen Lösung ohne bzw. mit den Effekten der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration. Die gepunkteten Kurven sind die Compton-Getting-transformierte Lösung aus dem mitbewegten Bezugssystem (gestrichelte Kurven) in das korotierende ortsfeste Bezugssystem.

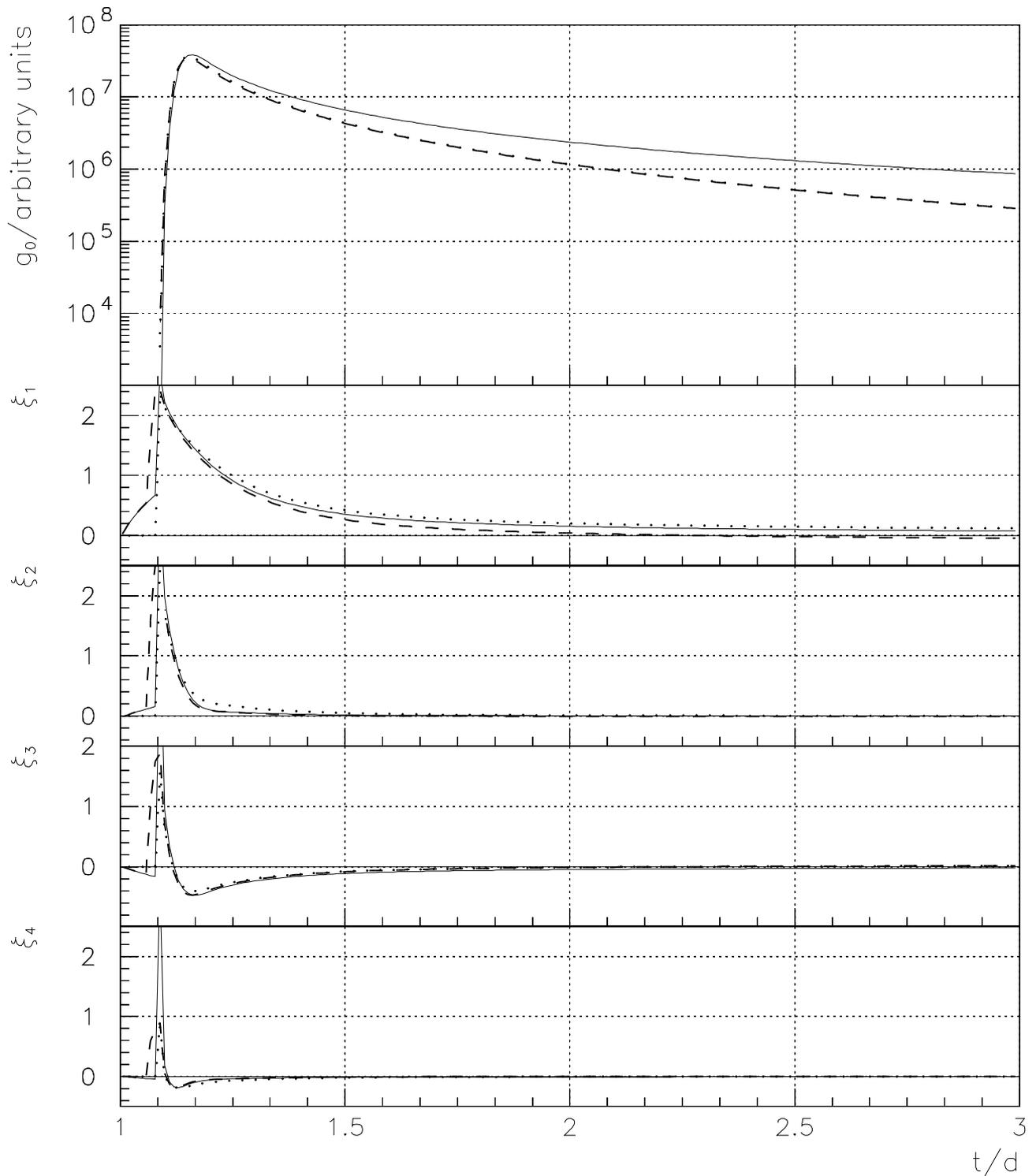


Abbildung 4.8: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_1 – ξ_4 sind für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU für Protonen von 3.5 MeV über der Zeit aufgetragen (weitere Ausbreitungsbedingungen siehe Text). Die durchgezogenen bzw. gestrichelten Kurven entsprechen der numerischen Lösung ohne bzw. mit den Effekten der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration. Die gepunkteten Kurven sind die Compton-Getting-transformierte Lösung aus dem mitbewegten Bezugssystem (gestrichelte Kurven) in das korotierende ortsfeste Bezugssystem.

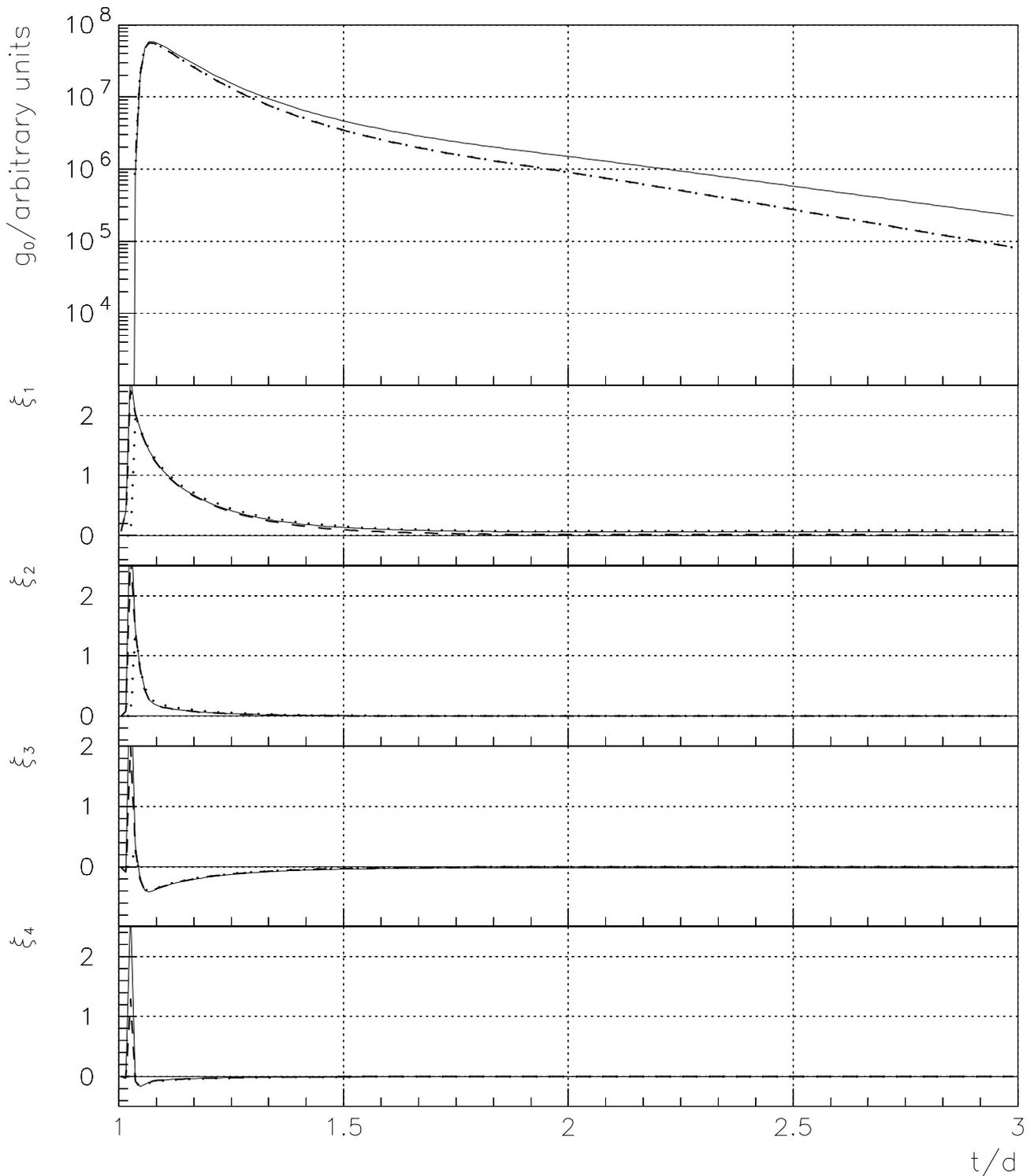


Abbildung 4.9: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die Anisotropien ξ_1 – ξ_4 sind für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU für Protonen von 32.4 MeV über der Zeit aufgetragen (weitere Ausbreitungsbedingungen siehe Text). Die durchgezogenen bzw. gestrichelten Kurven entsprechen der numerischen Lösung ohne bzw. mit den Effekten der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration. Die gepunkteten Kurven sind die Compton-Getting-transformierte Lösung aus dem mitbewegten Bezugssystem (gestrichelte Kurven) in das korotierende ortsfeste Bezugssystem.

tonen mit 3.5 MeV noch so gering, daß sie als Effekte höherer Ordnung betrachtet werden können.

Vergleicht man die Kurven im Detail, so zeigt sich, daß sich die bereits in den Abschnitten 4.3 und 4.4 separat betrachteten Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration überlagern. Die Verringerung der omnidirektionalen Intensität in der Spätphase des Ereignisses wird durch beide Effekte verstärkt. Dies führt besonders bei einer kleineren mittleren freien Weglänge zu einer deutlich schnelleren Abnahme der omnidirektionalen Intensität, wie in der Abbildung 4.6 zu erkennen ist. Bedingt durch die stärkere Streuung breiten sich die Teilchen nicht so schnell entlang der Magnetfeldlinie aus, so daß sie der adiabatischen Dezeleration relativ gesehen länger ausgesetzt sind. Das gleiche macht sich bei dem Effekt der Konvektion bemerkbar, der im Vergleich zu den sich wegen der starken Streuung nur langsam ausbreitenden Teilchen an Bedeutung zunimmt. Betrachtet man den Zeitpunkt des Anstiegs in der omnidirektionalen Intensität, so läßt sich erkennen, daß die Flanke der gestrichelten Kurve geringfügig früher auftritt als die der durchgezogenen Kurve, was eindeutig auf den Effekt der Konvektion zurückzuführen ist.

In den Anisotropien ξ_n machen sich die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration besonders in der ersten Ordnung bemerkbar. Deutlich ist der kleine Sockel der Anisotropie zu erkennen, der durch die numerische Diffusion zu erklären ist (siehe Abschnitt 4.4). Auch der darauffolgende frühzeitige Anstieg der Anisotropie im Vergleich zur durchgezogenen Kurve ist teilweise auf numerische Diffusion zurückzuführen. Zusätzlich wird dieser Anstieg jedoch durch die Konvektion und durch die sich zunächst mit höherer Geschwindigkeit ausbreitenden Teilchen verursacht, die dann wegen der adiabatischen Dezeleration Energie verlieren und bei einer Energie von 3.5 MeV vom Beobachter bei $r = 1$ AU wahrgenommen werden. In der Spätphase der Anisotropie erster Ordnung überlagern sich beide Effekte, so daß die Anisotropie schneller abnimmt und schließlich aufgrund der Konvektion einen schwach negativen Wert annimmt, wie bereits in Abschnitt 4.3 erklärt wurde.

Der bisher durchgeführte Vergleich zwischen den durchgezogenen und gestrichelten Kurven ist eher mathematisch motiviert gewesen. Es wurden die Lösungen der erweiterten Transportgleichung ohne und mit den Termen der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration miteinander verglichen, um den Beitrag dieser Terme zu verstehen. Physikalisch gesehen ist diese Vorgehensweise jedoch nur dann korrekt, wenn man die Veränderung der Pitchwinkelverteilungen aus der Sicht eines Beobachters im mitbewegten Bezugssystem betrachten möchte. Will man die Veränderungen der PWVs im korotierenden ortsfesten Bezugssystem durch die Berücksichtigung der durch den Sonnenwind bedingten Effekte untersuchen, so ist noch die Compton-Getting-Transformation durchzuführen.

Die gepunkteten Kurven in den Abbildungen 4.6 und 4.8 stellen die transformierten Lösungen aus dem mitbewegten Bezugssystem (gestrichelte Kurven) dar. Ein physikalisch korrekter Vergleich ist somit zwischen den durchgezogenen und den gepunkteten Kurven durchzuführen. Da bei der durch die Gleichung (4.17) beschriebenen Compton-Getting-Transformation die Annahme einer Impulsverteilung eingeht, die sich in der Umgebung des zu transformierenden Impulses durch ein Potenzgesetz beschreiben läßt, wird die Transformation erst mit dem Einsatz der in den Abbildungen 4.6 und 4.8 sichtbaren Flanken der omnidirektionalen Intensität g_0 durchgeführt. Im weiteren zeitlichen Verlauf wird jeweils der Exponent γ' ermittelt, durch den sich lokal das Potenzgesetz beschreiben läßt, um dann mit diesem Exponenten die Compton-Getting-Transformation durchzuführen.

Wie man beim Vergleich der gestrichelten mit den gepunkteten Kurven erkennt, verändert

sich die omnidirektionale Intensität durch die Transformation nur äußerst geringfügig. Die bisher gewonnenen Erkenntnisse beim Vergleich der durchgezogenen mit den gestrichelten Kurven behalten somit hinsichtlich der omnidirektionalen Intensität ihre Gültigkeit.

Anders sieht es jedoch bei der Anisotropie erster Ordnung aus, da nun die gepunkteten Kurven systematisch über den durchgezogenen Kurven liegen. Ein Beobachter im korotierenden ortsfesten Bezugssystem nimmt somit durch die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration eine leicht erhöhte Anisotropie wahr. Dies steht im Gegensatz zum Beobachter im mitbewegten Bezugssystem, der eine systematisch geringere und in der Spätphase sogar schwach negative Anisotropie wahrnimmt.

Betrachtet man abschließend die verbleibenden Anisotropien höherer Ordnung, so zeigt sich, daß auch nach Durchführung der korrekten Transformation kaum ein Unterschied zwischen den Kurven festzustellen ist.

Zusätzlich zu den zeitabhängigen Lösungen von Protonen mit einer Energie von 3.5 MeV sind in den Abbildungen 4.7 und 4.9 die zeitabhängigen Lösungen von Protonen mit einer Energie von 32.4 MeV dargestellt. Die Ausbreitungsbedingungen sind dabei identisch mit denen der Abbildungen 4.6 und 4.8, so daß sich die Lösungen in den Abbildungen 4.6 und 4.7 bzw. 4.8 und 4.9 nur in den Geschwindigkeiten der Teilchen unterscheiden. Die Protonen mit einer Energie von 32.4 MeV breiten sich im Vergleich zu den Protonen von 3.5 MeV mit dreifacher Geschwindigkeit aus, wodurch das zeitliche Profil im wesentlichen⁵ um den Faktor drei gestaucht wird. Für die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration ergibt sich dadurch insgesamt ein geringerer Einfluß auf das Zeitprofil der Lösung, da sich beide Effekte erst in der Spätphase des Ereignisses deutlich bemerkbar machen. Von besonderer Bedeutung sind dabei die Maxima, die zu früheren Zeiten verschoben werden, da diese den wesentlichen Beitrag bei der Summation der Legendre-Koeffizienten über der Zeit liefern. Für die stationären Lösungen, die nach dem steady-state-Theorem aus Abschnitt 2.2.3 proportional zu den aufsummierten zeitabhängigen Lösungen sind, ergibt sich damit ebenfalls ein geringerer Einfluß der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration.

4.6.2 Die stationären Lösungen

4.6.2.1 Die stationären Anisotropien ξ_{ns}

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die zeitabhängigen Lösungen untersucht wurden, werden in diesem Abschnitt die stationären Lösungen der erweiterten Transportgleichung betrachtet. Zwar werden durch den Meßvorgang zunächst nur zeitabhängige Lösungen gewonnen; diese lassen sich aber mit Hilfe des steady-state-Theorems aus Abschnitt 2.2.3 bis auf eine Konstante in die stationären Lösungen überführen. Die stationären Lösungen haben den Vorteil, daß sie unabhängig von einem zeitabhängigen Injektionsprofil sind und somit einen besseren Einblick in die Gestaltung der Pitchwinkelverteilung durch die Ausbreitungsbedingungen gestatten.

Während die im vorhergehenden Abschnitt untersuchten zeitabhängigen Lösungen auf einen bestimmten radialen Abstand beschränkt waren, läßt sich die nun vakante Zeitachse nutzen, um die Anisotropien ξ_{ns} bis zur vierten Ordnung in Abhängigkeit vom radialen Abstand aufzutragen, wie es in den Abbildungen 4.10–4.13 zu sehen ist.

⁵Dies ist nicht ganz korrekt, da die Zeitskala des Injektionsprofils von der Teilchengeschwindigkeit unabhängig ist.

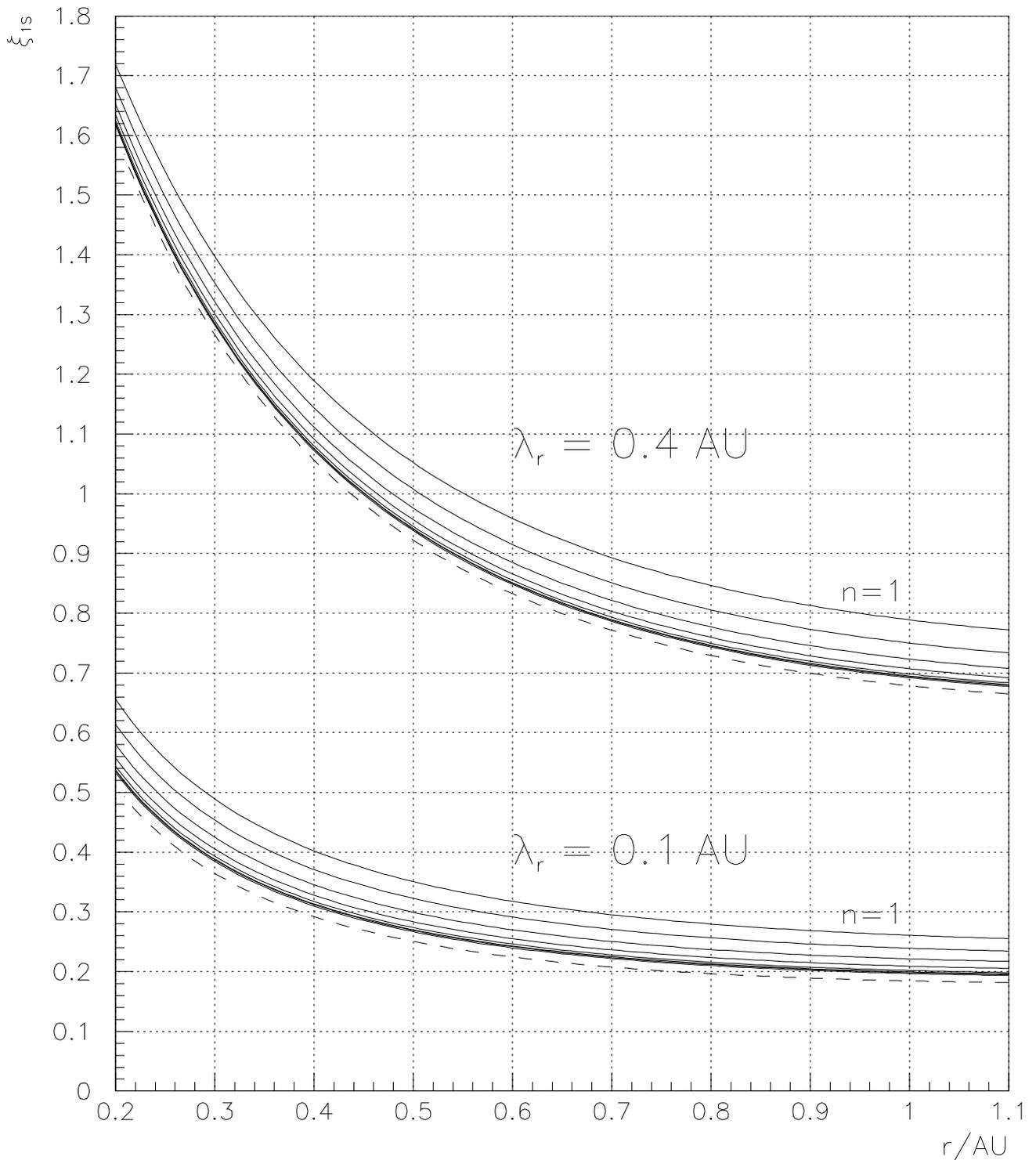


Abbildung 4.10: Die Anisotropie ξ_{1s} ist für radiale mittlere freie Weglängen von $\lambda_r = 0.1 \text{ AU}$ und $\lambda_r = 0.4 \text{ AU}$ über dem radialen Abstand aufgetragen (weitere Ausbreitungsbedingungen siehe Abschnitt 4.6.1). Die gestrichelten bzw. durchgezogenen Kurven entsprechen den numerischen Lösungen ohne bzw. mit den Effekten der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration. Die durchgezogenen Kurven sind für Protonen unterschiedlicher Energie und Geschwindigkeit berechnet worden (siehe Tabelle 4.2).

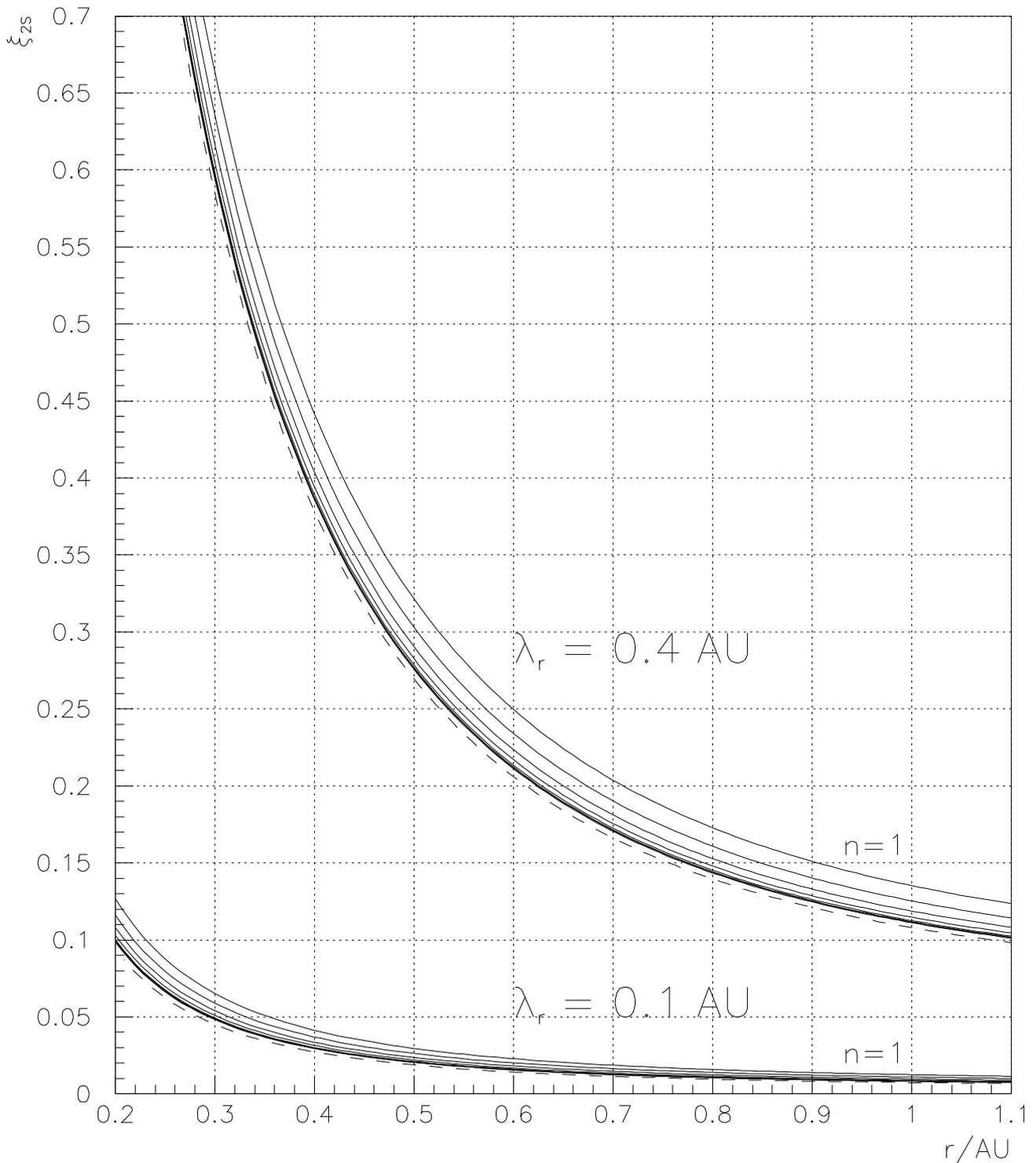


Abbildung 4.11: Die Anisotropie ξ_{2s} ist für radiale mittlere freie Weglängen von $\lambda_r = 0.1 \text{ AU}$ und $\lambda_r = 0.4 \text{ AU}$ über dem radialen Abstand aufgetragen (weitere Ausbreitungsbedingungen siehe Abschnitt 4.6.1). Die gestrichelten bzw. durchgezogenen Kurven entsprechen den numerischen Lösungen ohne bzw. mit den Effekten der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration. Die durchgezogenen Kurven sind für Protonen unterschiedlicher Energie und Geschwindigkeit berechnet worden (siehe Tabelle 4.2).

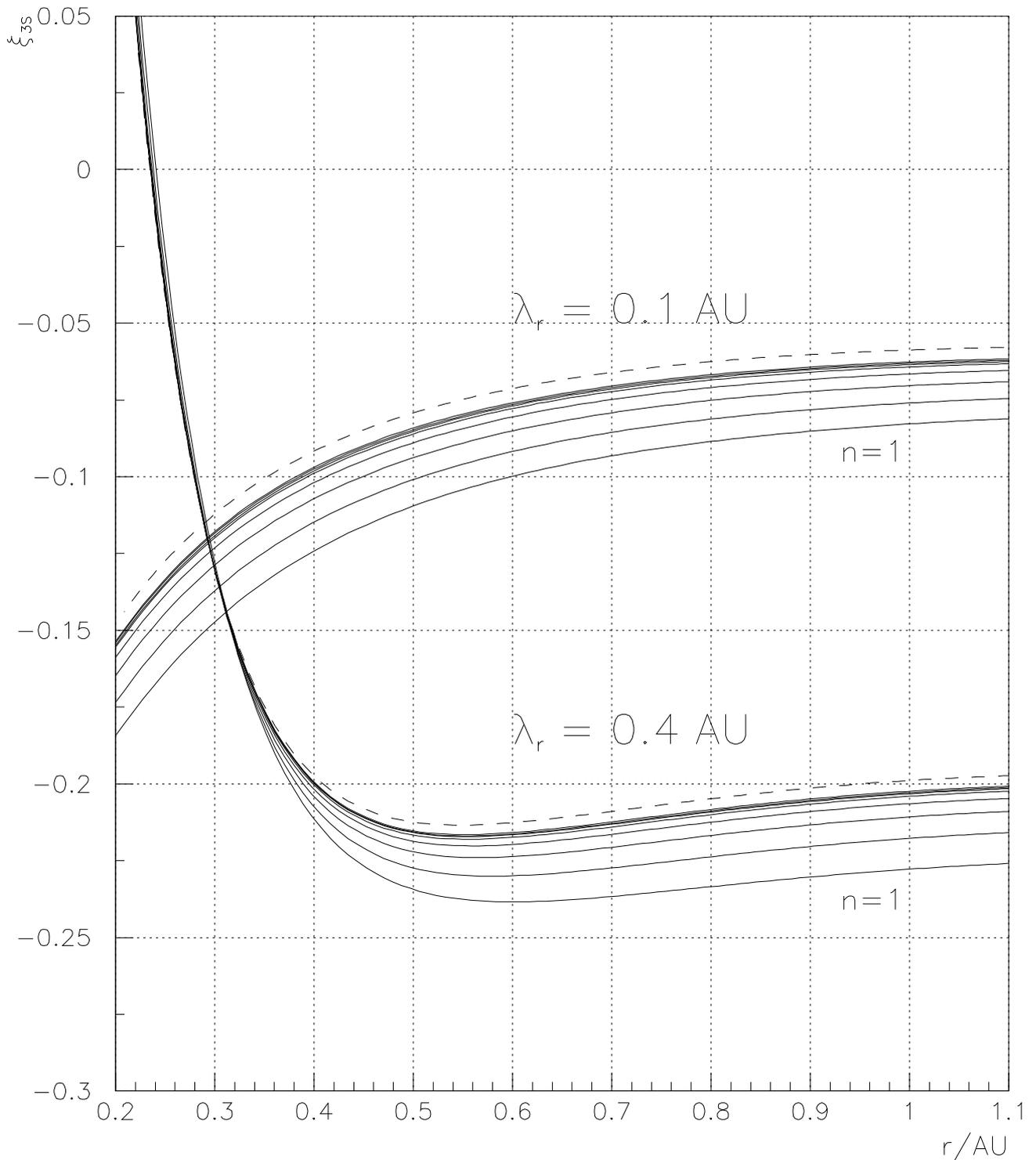


Abbildung 4.12: Die Anisotropie ξ_{3s} ist für radiale mittlere freie Weglängen von $\lambda_r = 0.1 \text{ AU}$ und $\lambda_r = 0.4 \text{ AU}$ über dem radialen Abstand aufgetragen (weitere Ausbreitungsbedingungen siehe Abschnitt 4.6.1). Die gestrichelten bzw. durchgezogenen Kurven entsprechen den numerischen Lösungen ohne bzw. mit den Effekten der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration. Die durchgezogenen Kurven sind für Protonen unterschiedlicher Energie und Geschwindigkeit berechnet worden (siehe Tabelle 4.2).

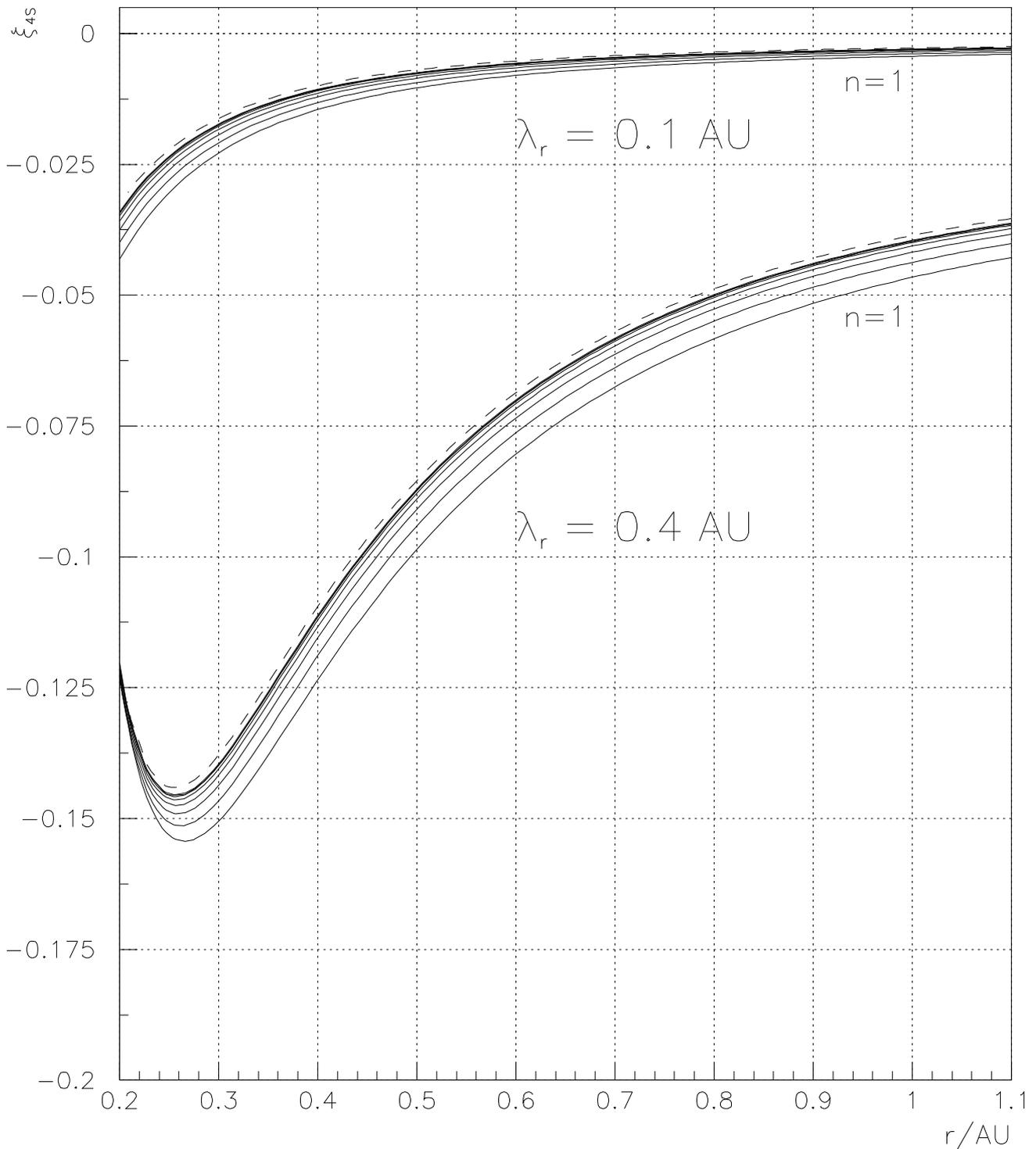


Abbildung 4.13: Die Anisotropie ξ_{4s} ist für radiale mittlere freie Weglängen von $\lambda_r = 0.1$ AU und $\lambda_r = 0.4$ AU über dem radialen Abstand aufgetragen (weitere Ausbreitungsbedingungen siehe Abschnitt 4.6.1). Die gestrichelten bzw. durchgezogenen Kurven entsprechen den numerischen Lösungen ohne bzw. mit den Effekten der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration. Die durchgezogenen Kurven sind für Protonen unterschiedlicher Energie und Geschwindigkeit berechnet worden (siehe Tabelle 4.2).

n	E_n (MeV)	v_n (AU/h)
1	3.5	0.62
2	10.7	1.08
3	32.4	1.84
4	96.0	3.03
5	270.3	4.54
6	692.4	5.88
7	1578.0	6.68
8	3255.6	7.01

Tabelle 4.2: Die jeweils acht durchgezogenen Kurven in den Abbildungen 4.10–4.13, die für eine vorgegebene radiale mittlere freie Weglänge berechnet wurden, entsprechen den Lösungen der erweiterten Transportgleichung für Protonen mit den aufgelisteten Energien E_n in MeV bzw. den zugehörigen Geschwindigkeiten v_n in AU/h.

Betrachtet man zunächst exemplarisch die Abbildung 4.10, so sind zwei dicht gedrängte Kurvenscharen zu erkennen, von denen jeweils eine Kurve gestrichelt ist, während die anderen Kurven durchgezogen dargestellt sind. Die gestrichelten Kurven entsprechen den Lösungen der erweiterten Transportgleichung mit einer identisch verschwindenden radialen Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{\text{sw}} = 0$. Für alle durchgezogenen Kurven ist eine Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{\text{sw}} = 400$ km/s zugrundegelegt. Daß es sich dennoch um eine ganze Schar von durchgezogenen Kurven handelt, liegt an dem variabel gehaltenen Impuls der Protonen, der den Energien bzw. den Geschwindigkeiten aus Tabelle 4.2 entspricht. Die durchgezogene Kurve für Protonen mit einer Energie von 3.5 MeV ist mit $n = 1$ gekennzeichnet und weist deutlich die höchste Anisotropie von allen durchgezogenen Kurven auf. Für die anderen durchgezogenen Kurven nimmt mit zunehmender Energie und damit auch mit zunehmender Geschwindigkeit der Protonen der Wert der Anisotropie $\zeta_{1s}(r)$ für einen bestimmten radialen Abstand ab.

Um, wie schon im vorhergehenden Abschnitt, die Fälle starker wie schwacher Streuung untersuchen zu können, ist die Kurvenschar mit der vom Betrag her jeweils geringeren Anisotropie mit einer radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.1$ AU berechnet worden, während die andere Kurvenschar mit einer radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU berechnet wurde. Die übrigen Ausbreitungsbedingungen sind identisch mit den im vorherigen Abschnitt vorgestellten.

Betrachtet man zunächst wieder die Gemeinsamkeiten sowohl der gestrichelten als auch der durchgezogenen Kurven, so ist deutlich zu erkennen, daß die Anisotropiewerte ξ_{ns} mit dem radialen Abstand r abnehmen. Grund hierfür ist die stärkere Fokussierung bei geringem radialen Abstand, die zu einer stärkeren Bündelung der Pitchwinkelverteilung und damit zu einer Erhöhung der Anisotropien führt. Die im Verhältnis zur Streuung stärkere Fokussierung erklärt ebenfalls, weshalb die Anisotropien vom Betrag her bei $\lambda_r = 0.4$ AU größere Werte annehmen als bei $\lambda_r = 0.1$ AU. Dies führt zu den beiden deutlich voneinander getrennten Kurvenscharen für die beiden hier verwendeten radialen mittleren freien Weglängen. Im Fall der Anisotropie dritter Ordnung ξ_{3s} kommt es jedoch bei einem radialen Abstand von $r = 0.3$ AU

zu einer Überschneidung beider Kurvenscharen. Die Anisotropie ξ_{3s} nimmt in diesem Bereich die gleichen Werte an, obwohl die mittlere freie Weglänge unterschiedlich ist. Zudem sind auch bei der stationären Lösung die negativen ξ_{3s} -Werte zu beobachten, die Ausdruck des ausgeprägten “resonance gap” sind.

Vergleicht man desweiteren die durchgezogenen Kurven für dieselbe radiale mittlere freie Weglänge untereinander, so wird deutlich, wie die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration mit geringer Energie und damit abnehmender Geschwindigkeit der Teilchen zunehmen. Für hohe Energien konvergieren die Kurven jedoch gegen eine einzige Kurve, und zwar in gleichem Maße wie die Geschwindigkeit der Teilchen gegen die Lichtgeschwindigkeit konvergiert. Diese Kurve ist nicht identisch mit der gestrichelten Kurve für eine identisch verschwindende Sonnenwindgeschwindigkeit, da das Verhältnis v_{sw}/v mit $v = c$ zwar klein, aber nicht gleich null ist. Die Konvektion und die adiabatische Dezeleration liefern somit zwar einen Beitrag zum Transport von Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit, welcher aber so gering ist, daß er keine Bedeutung hat.

Ein Verständnis des detaillierten Verlaufs der durchgezogenen Kurven ist am besten zu erreichen, wenn man von den zeitabhängigen Lösungen ausgeht und sich bewußt macht, welche Eigenschaften durch die Anwendung des steady-state-Theorems für die stationären Lösungen abgeleitet werden können. So führen die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration zu einer Verringerung der omnidirektionalen Intensität g_{0s} , wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde. Die Summe der omnidirektionalen Intensität ist damit aber ebenfalls deutlich geringer, so daß die Anisotropien ξ_{ns} , die als das Verhältnis der Legendre-Koeffizienten g_{ns} zur omnidirektionalen Intensität g_{0s} definiert sind, vom Betrag her größer ausfallen.

Die absolute Differenz zwischen den durchgezogenen und den gestrichelten Kurven der Anisotropie erster Ordnung ist für $\lambda_r = 0.4$ AU fast unabhängig vom radialen Abstand, während für $\lambda_r = 0.1$ AU die absolute Differenz mit größerem radialen Abstand geringer ausfällt. Dies ist verständlich, da die Stärke der adiabatischen Dezeleration mit kleinerem radialem Abstand zunimmt. Den Hauptbeitrag liefert dabei der Betatron-Effekt, der mit kleiner werdender Fokussierungslänge zunimmt. Bei größerer mittlerer freier Weglänge verliert der Betatron-Effekt jedoch an Bedeutung, da die im Vergleich zur Streuung stärkere Fokussierung die Pitchwinkelverteilungen stärker bündelt. Der Betatron-Effekt ist, wie in Abschnitt 4.4 gezeigt wurde, am wirksamsten für Teilchen mit einem Pitchkosinus von $\mu = 0$. Von diesen Teilchen gibt es jedoch bei starker Bündelung der PWV nur relativ wenige, so daß auch der Effekt der adiabatischen Dezeleration insgesamt geringer ausfällt. Die Effekte der adiabatischen Dezeleration und der Fokussierung sind somit in ihrer radialen Abhängigkeit kontraproduktiv. Verstärkend kommt hinzu, daß die starke Fokussierung zu einem ausgeprägten, zeitlich früheren und damit weniger stark von der adiabatischen Dezeleration beeinflussten Maximum führt. Für die aufsummierte und damit stationäre PWV bedeutet dies einen schwächeren Einfluß der adiabatischen Dezeleration, da das Maximum der Legendre-Koeffizienten g_n die aufsummierten Legendre-Koeffizienten g_{ns} wesentlich prägt.

Der Betrag der absoluten Differenz zwischen den durchgezogenen und den gestrichelten Kurven ist trotz der um den Faktor vier unterschiedlichen mittleren freien Weglängen für die Anisotropie erster Ordnung ξ_{1s} (Abbildung 4.10) in etwa gleich groß. Für die auf den Wert der Anisotropie ξ_{1s} bezogenen relativen Differenzen ergibt sich demnach für kleinere mittlere freie Weglängen wegen der geringeren Anisotropie ein wesentlich größerer Wert. Die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration liefern somit relativ gesehen

einen stärkeren Beitrag bei kleineren mittleren freien Weglängen, wie man auch schon aus der unterschiedlich starken Beeinflussung des zeitlichen Verlaufs der omnidirektionalen Intensität in den Abbildungen 4.6 und 4.8 entnehmen konnte.

Der bisher durchgeführte Vergleich gilt strenggenommen wieder nur für einen Beobachter im mitbewegten Bezugssystem. Möchte man die Pitchwinkelverteilungen aus der Sicht eines Beobachters im korotierenden ortsfesten Bezugssystem betrachten, so ist vorher noch die Compton-Getting-Transformation durchzuführen. Darauf wird in diesem Abschnitt jedoch verzichtet, da die Compton-Getting-Transformation selbst bei Protonen von 3.5 MeV einen äußerst geringen Beitrag liefert und die zusätzlichen transformierten Kurven die Abbildungen 4.10–4.13 nur unübersichtlich machen würden, ohne einen Erkenntnisbeitrag zu liefern.

Im Zusammenhang mit der Compton-Getting-Transformation ist darauf hinzuweisen, daß das steady-state-Theorem wegen der Nichtlinearität der Transformation seine Gültigkeit für die transformierten Pitchwinkelverteilungen verliert. Ein Beobachter im korotierenden ortsfesten Bezugssystem kann daher nicht die stationäre PWV berechnen, indem er über die zeitabhängigen PWVs summiert. Ist der durch die Compton-Getting-Transformation verursachte Effekt jedoch gering, da die Teilchen eine im Verhältnis zur Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw}^c große Ausbreitungsgeschwindigkeit haben, so gilt natürlich das steady-state-Theorem in sehr guter Näherung.

4.6.2.2 Das Potenzspektrum

Nachdem bisher nur die Anisotropien in ihrem radialen Verlauf betrachtet worden sind, sollen nun die omnidirektionalen Intensitäten untersucht werden. Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, werden die Teilchen mit einem Potenzgesetz im Impuls in der Nähe der Sonne injiziert. Der Index des Potenzgesetzes beträgt dabei $\delta'_s = 5$. Dieses Potenzgesetz ist einer räumlichen Entwicklung unterworfen, während sich die Teilchen in den interplanetaren Raum ausbreiten. Bedingt durch die von der Geschwindigkeit v' der Teilchen abhängigen Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration wird die omnidirektionale Intensität unterschiedlich stark beeinflusst. So werden die Teilchen mit den höchsten Energien, d. h. $v \approx c$, kaum beeinflusst, während es bei den Teilchen mit niedrigen Energien zu einer deutlichen Veränderung der omnidirektionalen Intensität kommt.

Betrachtet man das Impulsspektrum in einem doppellogarithmischen Maßstab, so ergibt sich für die hohen Impulse ein linearer Verlauf mit der Steigung $-\delta'_s$, d. h. es tritt keine Veränderung des Spektrums auf. Je geringer die Energie und damit auch der Impuls der Teilchen wird, desto stärker weicht das Spektrum von einem linearen Verlauf ab. Das Spektrum nimmt zu niedrigen Energien hin einen konvexen Verlauf an. Wie ausgeprägt dieser Effekt ist, hängt vom radialen Abstand ab. Beginnend mit dem linearen Verlauf des Potenzgesetzes der Injektionsfunktion wird das Spektrum mit zunehmendem radialen Abstand in einen immer konvexeren Verlauf gezwungen. Der Nettoeffekt der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration auf die omnidirektionale Intensität summiert sich mit dem radialen Abstand auf. Bei Spektren mit einem steilen Verlauf, d. h. einem großen δ'_s bzw. γ'_s , wird auch von einem harten Spektrum gesprochen. Dementsprechend werden Spektren mit einem kleinen δ'_s bzw. γ'_s als weiche Spektren bezeichnet. Es kann daher gesagt werden, daß die Spektren mit zunehmendem radialen Abstand weicher werden. Die Stärke des Effekts hängt dabei noch zusätzlich von der mittleren freien Weglänge ab. Ist die mittlere freie Weglänge klein, so wird die omnidirektionale Intensität stärker von der Konvektion und der adiabatischen

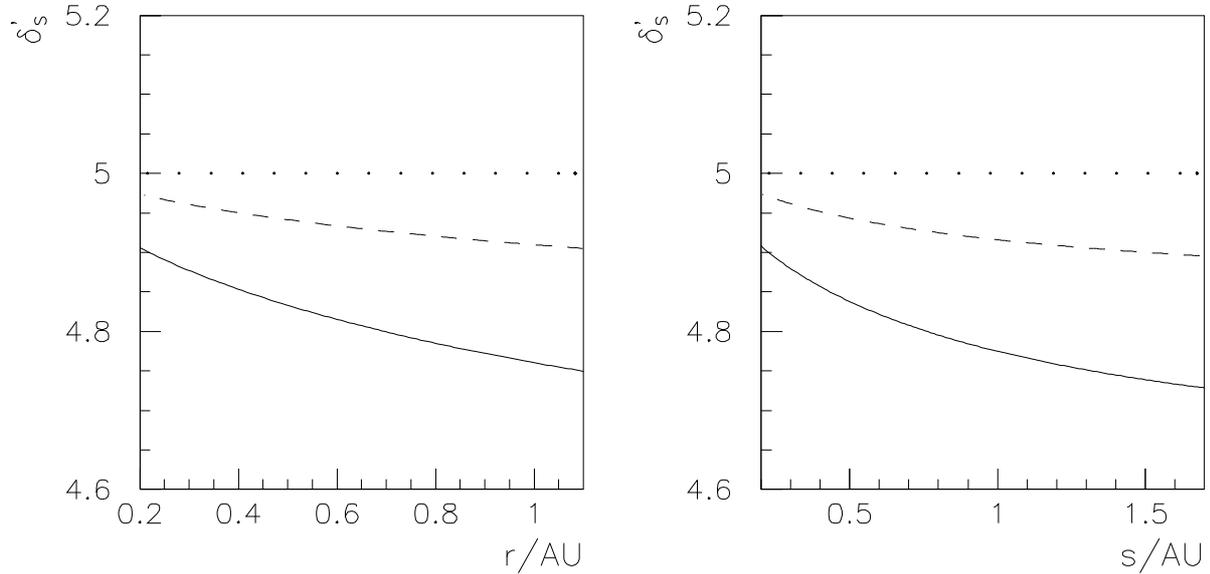


Abbildung 4.14: Der Spektralindex δ'_s des Impulsspektrums ist für die stationäre Lösung in Abhängigkeit vom radialen Abstand r (links) und von der Bogenlänge s entlang der Magnetfeldlinie dargestellt. Die durchgezogene Kurve entspricht der Lösung im mitbewegten Bezugssystem für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.1$ AU, die gestrichelte Kurve für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU. Die gepunktete Linie gibt zum Vergleich den Spektralindex der Injektionsfunktion an.

Dezeleration beeinflusst.

Um dies deutlich zu machen, ist in Abbildung 4.14 der Spektralindex des Impulsspektrums δ'_s in Abhängigkeit sowohl vom radialen Abstand r als auch von der Bogenlänge s entlang der Magnetfeldlinie aufgetragen. Die Impulsspektren wurden im doppellogarithmischen Maßstab mit einem Potenzgesetz gefittet, wobei der Fit mit zunehmendem radialen Abstand wegen des zunehmend konvexen Verlaufs schlechter wird. Die durchgezogene Kurve entspricht einer radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.1$ AU, die gestrichelte Kurve einer mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU und die gepunktete Kurve stellt den Spektralindex der Injektionsfunktion dar. Es wird somit noch einmal quantitativ bestätigt, daß der Spektralindex mit zunehmendem radialen Abstand, verstärkt durch eine kleinere mittlere freie Weglänge, abnimmt.

4.7 Auswirkung der erweiterten Transportgleichung

Anhand von ausgewählten Lösungen der erweiterten Transportgleichung wurden die quantitativen Auswirkungen der Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration auf die Ausbreitung und damit auf die Pitchwinkelverteilungen der Teilchen untersucht. Es hat sich dabei gezeigt, daß diese Effekte in dem hier betrachteten Energiebereich für Protonen bis zu einer minimalen Energie von 3.5 MeV zwar einen Beitrag zu den Lösungen leisten, dieser

aber so gering ist, daß von Effekten höherer Ordnung gesprochen werden kann. Bedenkt man den im Vergleich zum GREF-Programm wesentlich höheren Rechenaufwand und den in der Auswertung noch hinzukommenden Parameter des Impulses p' bzw. der Geschwindigkeit v' , so erscheint es sinnvoll, mit den Lösungen der Transportgleichung (2.58) zu arbeiten. Der dabei begangene Fehler kann quantitativ angegeben werden (siehe Abschnitt 6.2) und ist für die hohen Energien der α -Teilchen, Protonen und Elektronen des E6-Experimentes gering.

Kapitel 5

Eigenschaften der Lösungen der Transportgleichung

Dieses Kapitel dient zur Vorbereitung eines Auswertungsverfahrens der gemessenen Pitchwinkelverteilungen. Dafür ist es zunächst notwendig, sich mehr Information über die Eigenschaften der Lösungen der Transportgleichung zu verschaffen. Unter Eigenschaften wird die Abhängigkeit von den Ausbreitungsbedingungen $L(r)$, $\lambda_r(r)$, \hat{q} , H und $\hat{\sigma}$ verstanden, die es, wenn möglich, aus den gemessenen Pitchwinkelverteilungen zu bestimmen gilt. Da, wie bereits bemerkt wurde, keine analytische Lösung der Transportgleichung für allgemeine Ausbreitungsbedingungen bekannt ist, müssen die Lösungen für unterschiedliche Ausbreitungsbedingungen numerisch berechnet werden. Dies erfolgt mit dem in Kapitel 3 vorgestellten Differenzenverfahren, das in dem Computerprogramm GREF umgesetzt ist. Die numerischen Lösungen sind in ihrer Qualität vergleichbar mit den exakten Lösungen, haben aber den Nachteil, daß die Zusammenhänge zwischen den Ausbreitungsbedingungen und den Lösungen nicht wie in einem analytischen Ausdruck unmittelbar deutlich werden. Die numerischen Lösungen können jedoch dazu verwendet werden, analytische Näherungslösungen zu überprüfen, um deren Gültigkeitsbereich zu untersuchen. Stellt sich heraus, daß eine analytische Näherungslösung als gute Approximation für einen bestimmten Lösungsbereich verwendet werden kann, so ist damit der analytische Zusammenhang zwischen den Ausbreitungsbedingungen und der Lösung näherungsweise bekannt.

5.1 Die diffusive Näherung für schwach inhomogene Magnetfelder

Ausgehend von der konservativen Form der Transportgleichung (2.58) hat GREEN [1992], S. 79ff., die von HASSELMANN AND WIBBERENZ [1970] eingeführte diffusive Näherung auf schwach inhomogene Magnetfelder erweitert. Dabei wird zunächst die lineare Dichte ζ in einen isotropen und einen anisotropen Anteil aufgespalten¹

$$\zeta(t, s, \mu) = \zeta_0(t, s) + \zeta_1(t, s, \mu) \quad (5.1)$$

¹Es handelt sich hierbei noch nicht um eine Näherung, da es keine einschränkenden Annahmen über das Verhältnis der Terme ζ_0 und ζ_1 zueinander gibt.

Eingesetzt in die Transportgleichung (2.58) ergibt sich:²

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \zeta_1}{\partial s} = \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\kappa(s, \mu) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu} - \frac{v}{2L(s)} (1 - \mu^2) \zeta_1 \right) + v\mu \left(\frac{\zeta_0}{L(s)} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Betrachtet man stationäre Verhältnisse, so verschwinden die ersten beiden Terme auf der linken Seite der Gleichung identisch. Die verbleibende *vollständige stationäre Transportgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\kappa(s, \mu) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu} - \frac{v}{2L(s)} (1 - \mu^2) \zeta_1 \right) + v\mu \left(\frac{\zeta_0}{L(s)} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial s} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial s} \right) = 0 \quad (5.4)$$

ist immer noch zu kompliziert, um sie für allgemeine räumliche Verläufe von $\kappa(s, \mu)$ und $L(s)$ zu lösen. Erst die Vernachlässigung des verbleibenden Terms auf der linken Seite der Gleichung (5.3) ermöglicht es, die *genäherte stationäre Transportgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\kappa(s, \mu) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu} - \frac{v}{2L(s)} (1 - \mu^2) \zeta_1 \right) + v\mu \left(\frac{\zeta_0}{L(s)} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial s} \right) = 0 \quad (5.5)$$

zu lösen. Diese Näherung ist für

$$\frac{\zeta_1}{\frac{\partial \zeta_1}{\partial s}} \gg \lambda_{||}(s) \quad (5.6)$$

d. h. eine im Verhältnis zur mittleren freien Weglänge große Skalenlänge des anisotropen Anteils ζ_1 zu rechtfertigen. Insbesondere für starke Pitchwinkelstreuung mit einem kleinen Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ist diese Voraussetzung erfüllt. Die so gewonnene genäherte stationäre PDGl (5.5) ist identisch mit der PDGl, die sich unter Verwendung der diffusiven Näherung aus Gleichung (5.3) ergibt. Die *diffusive Näherung* besteht darin, bei starker Pitchwinkelstreuung die Terme auf der linken Seite der Gleichung (5.3) gegenüber den Termen auf der rechten Seite zu vernachlässigen. Im Gegensatz zu der Näherung für die stationäre PDGl (5.4) ist die diffusive Näherung jedoch wesentlich umfassender, da sie als Näherung der zeitabhängigen Lösung gedacht ist. Die beiden ersten Terme auf der linken Seite der Gleichung (5.3) werden zusätzlich vernachlässigt, obwohl sie im allgemeinen von null verschieden sind.

Betrachtet man abschließend noch den Fall der vollständigen stationären Transportgleichung für ein von der räumlichen Koordinate unabhängiges Produkt $L(s) \cdot \kappa(s, \mu) = \text{const}(\mu)$, so ergibt sich folgende PDGl

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\kappa(s, \mu) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu} - \frac{v}{2L(s)} (1 - \mu^2) \zeta_1 \right) + v\mu \frac{\zeta_0}{L(s)} = 0 \quad (5.7)$$

die sich als Spezialfall der Gleichung (5.5) erweist. Die Lösung dieser PDGl wurde bereits in der Gleichung (2.65) angegeben.

²Unter Verwendung des Produktansatzes (2.24) für den PWSK und durch Division der gesamten Gleichung durch die Geschwindigkeit v kann die Gleichung auch in die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \zeta_1}{\partial s} = \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\lambda_{||}(s)} \bar{\kappa}(\mu) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mu} - \frac{1}{2L(s)} (1 - \mu^2) \zeta_1 \right) + \mu \left(\frac{\zeta_0}{L(s)} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Größe $\tau = v \cdot t$ ist bereits in Gleichung (2.68) definiert worden und hat die Dimension einer Länge.

Als Lösung der PDGl (5.5) ergibt sich für den anisotropen Anteil nach GREEN [1992], S. 82:

$$\zeta_1(s, \mu) = \left(\zeta_0(s) - L(s) \frac{\partial \zeta_0}{\partial s} \right) \left(\frac{e^{G(s, \mu)}}{\langle e^{G(s, \mu)} \rangle} - 1 \right) \quad (5.8)$$

$$\text{mit } G(s, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v}{2L(s)} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(1 - \tilde{\mu}^2)}{\kappa(s, \tilde{\mu})} d\tilde{\mu} \quad \text{und} \quad \langle e^{G(s, \mu)} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{G(s, \mu)} d\mu$$

Die Funktion $G(s, \mu)$ ist bereits in Gleichung (2.41) für den Spezialfall $L(s) \cdot \kappa(s, \mu) = \text{const}(\mu)$ eingeführt worden, für den die Funktion $G(s, \mu)$ ihre räumliche Abhängigkeit verliert.

Formt man nun die Lösung (5.8) nach dem isotropen Anteil um, so ergibt sich durch Lösen der inhomogenen linearen DGl 1. Ordnung:

$$\zeta_0(s) = \exp \left(\int_{s_0}^s \frac{d\tilde{s}}{L(\tilde{s})} \right) \left[- \int_{s_0}^s \frac{1}{L(\tilde{s})} \frac{\zeta_1(\tilde{s}, \mu) \langle e^{G(\tilde{s}, \mu)} \rangle}{e^{G(\tilde{s}, \mu)} - \langle e^{G(\tilde{s}, \mu)} \rangle} \exp \left(- \int_{s_0}^{\tilde{s}} \frac{d\hat{s}}{L(\hat{s})} \right) d\tilde{s} + C \right] \quad (5.9)$$

Der isotrope Anteil der linearen Dichte $\zeta_0(s_1)$ am Ort s_1 ist von den räumlichen Verläufen von $L(s)$, $G(s, \mu)$ und $\zeta_1(s, \mu)$ unterhalb des Ortes s_1 , d. h. mit $s \leq s_1$, abhängig. Bei dem isotropen Anteil der linearen Dichte handelt es sich somit um eine Größe, die von den Ausbreitungsbedingungen in einem großen räumlichen Bereich abhängig ist. Der isotrope Anteil der linearen Dichte soll daher im folgenden als *globale* Größe bezeichnet werden.

Betrachtet man hingegen den anisotropen Anteil $\zeta_1(s_1)$ am Ort s_1 , so ist dieser nur von den Werten $L(s_1)$, $G(s_1, \mu)$, $\zeta_0(s_1)$ und $\partial \zeta_0(s_1) / \partial s$ am Ort s_1 abhängig. Bei dem anisotropen Anteil $\zeta_1(s_1)$ handelt es sich somit um eine *lokale* Größe.

5.2 Die lokalen und globalen Legendre-Koeffizienten

Entwickelt man die lineare Dichte ζ in ihrer μ -Abhängigkeit nach Legendre-Polynomen, so wird deutlich, daß der isotrope Anteil ζ_0 die Projektion auf das Legendre-Polynom nullter Ordnung P_0 ist:

$$\zeta_0 = g_0 P_0 \quad \text{mit} \quad g_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \zeta(\mu) d\mu \quad (5.10)$$

Der anisotrope Anteil $\zeta_1(\mu)$ läßt sich hingegen mit den Legendre-Polynomen P_n mit $n \geq 1$ darstellen:

$$\zeta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n P_n(\mu) \quad \text{mit} \quad g_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \zeta(\mu) d\mu \quad (5.11)$$

Es handelt sich somit bei dem Legendre-Koeffizienten g_0 um eine globale Größe und bei den Legendre-Koeffizienten g_n mit $n \geq 1$ um lokale Größen. Diese Eigenschaften behalten sogar dann ihre Gültigkeit, wenn die vollständige stationäre PDGl (5.4) betrachtet wird.

Zur Veranschaulichung dieser Aussage wird im folgenden eine stationäre Lösung der PDGl (5.4) untersucht, bei der sich die Ausbreitungsbedingungen an einem Ort $s_1 = 2.5$ AU abrupt ändern. Der sich verändernde Parameter ist das Verhältnis $\lambda_{||}/L$, das sowohl den

isotropen als auch den anisotropen Anteil der linearen Dichte maßgeblich beeinflusst. Der PWSK wird hingegen mit den Parametern $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ als räumlich konstant angenommen.

In Abbildung 5.1 ist die numerische Lösung, entwickelt nach den Legendre-Koeffizienten g_{0s} bis g_{4s} , in ihrem räumlichen Verlauf dargestellt. Die vertikale gestrichelte Linie kennzeichnet den Ort $s_1 = 2.5$ AU, an dem sich das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ändert. Links von dieser Linie, d. h. für $s < 2.5$ AU, beträgt das Verhältnis $\lambda_{||}/L = 1$, rechts davon, d. h. für $s > 2.5$ AU, halbiert es sich auf den Wert $\lambda_{||}/L = 0.5$. Die Streuung verdoppelt sich somit relativ zur Fokussierung.

Es ist daher zunächst intuitiv zu erwarten, daß der isotrope Anteil in dem Gebiet stärkerer Streuung größer ist als in dem Gebiet schwacher Streuung, da die Teilchen bei stärkerer Streuung weniger zielgerichtet in Richtung des schwächer werdenden Magnetfeldes strömen. Dies drückt sich natürlich auch in dem anisotropen Anteil aus, der bei stärkerer Streuung weniger stark ausgeprägt ist. Der g_{1s} -Koeffizient nimmt dabei wieder eine Sonderrolle ein, da er durch die Veränderung des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ nicht beeinflusst wird. Wie bereits in Abschnitt 3.3 erwähnt, ist ein räumlich konstanter g_{1s} -Koeffizient Ausdruck für stationäre Verhältnisse: Aus der Kontinuitätsgleichung (2.61) folgt für stationäre Verhältnisse eine räumlich konstante Stromdichte, die wiederum wegen der Proportionalität zwischen dem g_{1s} -Koeffizienten und der Stromdichte (siehe Gleichung (2.64)) einen räumlich konstanten g_{1s} -Koeffizienten, d. h. $\partial g_1/\partial s = 0$, nach sich zieht. Der für stationäre Verhältnisse verbleibende Term auf der linken Seite der Gleichung (5.3) reduziert sich somit auf

$$v\mu \frac{\partial \zeta_1}{\partial s} = v\mu \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial g_{ns}}{\partial s} P_n(\mu) \quad (5.12)$$

Nach dieser zunächst intuitiven Einschätzung des räumlichen Lösungsverlaufs soll als nächstes der Lösungsverlauf betrachtet werden, der sich aus der analytischen Näherungslösung (2.65) für konstante Ausbreitungsbedingungen ergibt. Obwohl es an dem Ort $s_1 = 2.5$ AU zu einer Veränderung des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ kommt, wird die Lösung entsprechend dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ für konstante Ausbreitungsbedingungen nach der Gleichung (2.65) berechnet. Die Konstante \tilde{C}_1 wird dabei auf null gesetzt, und die Konstante \tilde{C}_2 dient dazu, die Lösung so zu skalieren, daß sich ein räumlich konstanter g_{1s} -Koeffizient ergibt. Dies ist notwendig, da die Randbedingungen bei der Lösung (2.65) nicht berücksichtigt werden, d. h. es wird angenommen, daß sich die Randbedingungen im Unendlichen befinden bzw. identisch mit der Lösung (2.65) sind. Als Folge davon ist der aus der Lösung (2.65) abgeleitete g_{1s} -Koeffizient (siehe Gleichung (A.13)) von dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ abhängig. Dies steht natürlich im Gegensatz zur numerischen Lösung, bei der sich, wie oben gezeigt, wegen der reflektierenden inneren Grenze ein räumlich konstanter g_{1s} -Koeffizient einstellt. Paßt man nun die Konstante \tilde{C}_2 so an, daß sie proportional zum Reziproken des g_{1s} -Koeffizienten ist, so ergibt sich ein g_{1s} -Koeffizient der Lösung (2.65), der von den Ausbreitungsbedingungen und damit auch vom Verhältnis $\lambda_{||}/L$ unabhängig ist.

Anders ausgedrückt: Will man die Legendre-Koeffizienten der numerischen Lösung aus Abbildung 5.1 mit den Legendre-Koeffizienten der Lösung (2.65) für konstante Ausbreitungsbedingungen vergleichen, die näherungsweise in den Gleichungen (A.12)–(A.17) angegeben sind, so ist dies auf direktem Weg nicht möglich, da sich die Lösungen wegen der unterschiedlichen Randbedingungen um eine von den Ausbreitungsbedingungen abhängige Konstante unterscheiden. Unabhängig davon können natürlich die Verhältnisse von Legendre-Koeffizienten

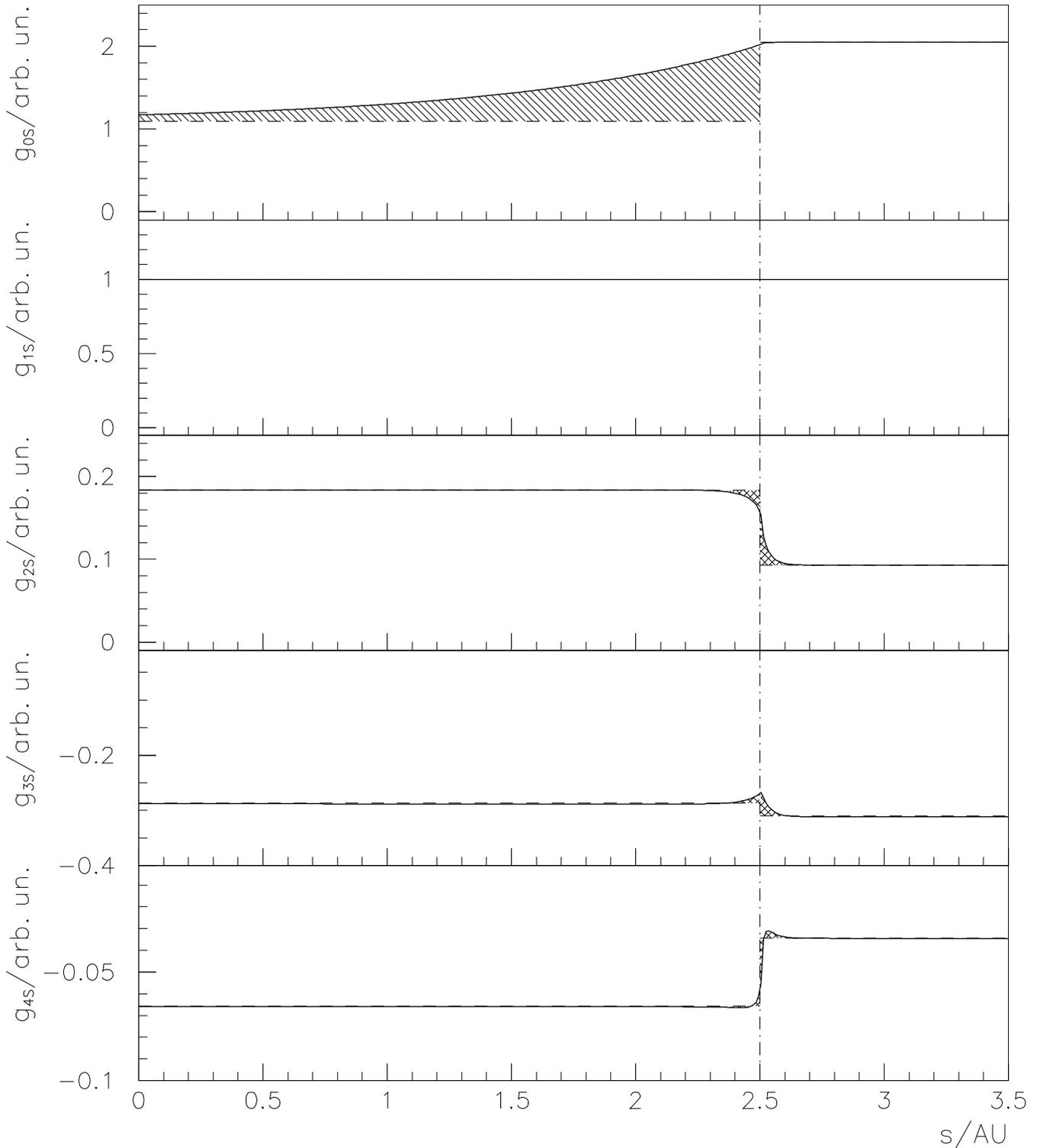


Abbildung 5.1: Die Legendre-Koeffizienten g_{0s} – g_{4s} der numerischen Lösung der vollständigen stationären PDGl (5.4) (durchgezogene Kurven) und der analytischen Lösung der Transportgleichung für konstante Ausbreitungsbedingungen (5.7) (gestrichelte Kurven) sind in ihrem räumlichen Verlauf dargestellt. Die Differenz beider Kurven ist als schraffierter Bereich kenntlich gemacht. Das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ hat links von der gestrichelten Linie bei $s = 2.5$ AU den Wert $\lambda_{||}/L = 1$, rechts davon $\lambda_{||}/L = 0.5$ AU. Der PWSK ist räumlich konstant mit den Parametern $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

miteinander verglichen werden. Aus diesem Grund sind die Legendre-Koeffizienten der numerischen Lösung in Abbildung 5.1 so skaliert worden, daß der g_{1s} -Koeffizient gleich eins ist und die übrigen Legendre-Koeffizienten mit den Verhältnissen g_{ns}/g_{1s} identisch sind. Dies erleichtert den Vergleich mit den aus der Gleichung (2.65) zu berechnenden Verhältnissen g_{ns}/g_{1s} , die in der Abbildung 5.1 als gestrichelte horizontale Linien eingezeichnet sind.

Interessant ist nun der schraffierte Bereich, der die Differenz zwischen der numerischen Lösung (durchgezogene Kurven) und der analytischen Näherungslösung kenntlich macht. Betrachtet man die Legendre-Koeffizienten $g_{ns}(s)$ mit $n > 1$, so zeigt sich, daß die analytische Näherungslösung entsprechend der Annahme (5.6) die numerische Lösung bis auf den Bereich unmittelbar um $s_1 = 2.5$ AU sehr gut wiedergibt. Dies zeigt deutlich, wie der anisotrope Anteil durch die lokalen Ausbreitungsbedingungen geprägt wird. Die Ausbreitungsbedingungen in einem hinreichenden Abstand vom Beobachtungsort, z. B. die abrupte Änderung des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ beeinflussen den anisotropen Anteil nur äußerst geringfügig. Befindet sich der Beobachtungsort hingegen in unmittelbarer Umgebung der Änderung der Ausbreitungsbedingungen, so ergibt sich in Abhängigkeit von der genauen Position eine Überlagerung der Ausbreitungsbedingungen zu beiden Seiten des Beobachtungsortes. Der sich dabei einstellende anisotrope Anteil ist nicht mehr in einfacher Weise als eine Funktion von dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ anzugeben, wie diese sich für konstante Ausbreitungsbedingungen ergibt. Vielmehr müssen in diesem Bereich die numerischen Lösungen herangezogen werden, um den anisotropen Anteil noch beschreiben zu können.

Dieses Verhalten des anisotropen Anteils läßt sich nicht auf den isotropen Anteil übertragen, wie man sofort am räumlichen Verlauf des g_{0s} -Koeffizienten erkennen kann. Die Veränderung der Ausbreitungsbedingungen am Ort $s_1 = 2.5$ AU hat Auswirkungen auf einen großen räumlichen Bereich unterhalb des Ortes s_1 , d. h. für $s < 2.5$ AU. Dieser räumliche Bereich beträgt ein Vielfaches des Bereichs, auf dem sich der anisotrope Anteil auf die Ausbreitungsbedingungen einstellt. Oberhalb des Ortes s_1 ist hingegen nur ein äußerst geringer Einfluß der sich ändernden Ausbreitungsbedingungen zu bemerken.

Überträgt man nun die gewonnenen Erkenntnisse über das Verhalten der Legendre-Koeffizienten g_{ns} auf die Ausbreitungsbedingungen, so ist festzuhalten, daß alle Größen, die den g_{0s} -Koeffizienten beinhalten, globaler Natur sind. Dies trifft insbesondere auf die Anisotropien ξ_{ns} zu, bei denen der g_{0s} -Koeffizient nach der Definition (1.22) als Kehrwert eingeht. Es bietet sich daher an, neue Größen zu definieren, die unabhängig vom g_0 -Koeffizienten und somit von lokaler Natur sind. Betrachtet man die Gleichung (5.8), so bietet es sich an, Verhältnisse von Legendre-Koeffizienten g_{ns} mit $n \geq 1$ zu bilden, um sich des Faktors $\zeta_0 - L\partial\zeta_0/\partial s$ zu entledigen. Weitere Faktoren, die sich aus der Transformation von der Intensität I bzw. Phasenraumdicke f auf die lineare Dichte ζ ergeben oder durch die Anwendung des steady-state-Theorems bedingt sind, können so ebenfalls beseitigt werden. Die so gebildeten Verhältnisse sind zudem identisch mit den Verhältnissen der g_{ns} -Legendre-Koeffizienten, die sich aus der Lösung der einfacheren PDGl (5.7) für konstante Ausbreitungsbedingungen ergeben.

GREEN [1992], S. 72, BEECK [1983], S. 19, BIEBER AND POMERANTZ [1985] und BEECK AND WIBBERENZ [1986]³ führen in diesem Zusammenhang eine Größe ein, die im folgenden

³BEECK AND WIBBERENZ [1986] definieren die normierte Verteilungsfunktion in Gleichung (18) folgendermaßen:

$$M(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{\lambda_{||}} \left(\frac{f(\mu)}{\langle f(\mu) \rangle} - 1 \right) \quad (5.13)$$

als *normierte Verteilungsfunktion* bezeichnet wird:

$$M(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(\mu) - g_0}{g_1} = \mu + \sum_{n=2}^N M_n P_n(\mu) \quad \text{mit} \quad M_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g_n}{g_1} \quad (5.15)$$

Die hier auftretenden Legendre-Koeffizienten g_n sind als Projektion der Verteilungsfunktion auf die Legendre-Polynome zu verstehen.

Einen ähnlichen Weg beschreiten GREEN AND SCHLÜTER [1985] bzw. SCHLÜTER [1985]. Im Gegensatz zu den oben genannten Autoren normieren sie jedoch den anisotropen Anteil der Verteilungsfunktion in der Norm L_2 der quadratisch integrierbaren Funktionen:

$$\|f\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_{-1}^{+1} (f(\mu))^2 d\mu} \quad (5.16)$$

Unter Verwendung der Parsevalschen Gleichung (vgl. JOOS UND RICHTER [1985], S. 300) und der Legendre-Koeffizienten ergibt sich somit:

$$K(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(\mu) - g_0}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{2}{2n+1} (g_n)^2}} = \sum_{n=1}^N K_n P_n(\mu) \quad \text{mit} \quad K_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{2}{2n+1} (g_n)^2}} \quad (5.17)$$

Die Funktion $K(\mu)$ wird von GREEN AND SCHLÜTER [1985] als *lokale Kennfunktion* bezeichnet. SCHLÜTER [1985], S. 42, argumentiert, daß die Definition der lokalen Kennfunktion der Definition der normierten Verteilungsfunktion vorzuziehen sei. Zum einen sei die Norm mit der Bestimmung der Legendre-Koeffizienten konsistent, und zum anderen könne es rein theoretisch Pitchwinkelverteilungen geben, die eine von null verschiedene Norm haben, deren g_1 -Koeffizient aber identisch verschwindet. Nach Definition (5.15) ergäben sich dann unbeschränkte M_n -Koeffizienten.

Zu seinem ersten Argument ist zu bemerken, daß die Norm (5.16) mathematisch gesehen zwar sehr ästhetisch sein mag, vom physikalischen Standpunkt her aber nicht notwendig ist. Wie oben bereits bemerkt, dient die Normierung des anisotropen Anteils dazu, sich unbestimmter Konstanten zu entledigen. Diesen Zweck erfüllt jedoch auch Definition (5.15). Sein zweites Argument ist ebenfalls zu entkräften, da der anisotrope Anteil der PWV immer mit einem von null verschiedenen Teilchenstrom verbunden ist. Sollte es dennoch bei der Auswertung von realen Daten aufgrund von statistischen Zählfehlern zu sehr hohen M_n -Koeffizienten kommen, so ist dies im Rahmen einer Fehlerfortpflanzung zu erklären.

Dabei verwenden sie die Definition der mittleren freien Weglänge $\lambda'_{||}$ für schwach inhomogene Magnetfelder (siehe Gleichung (2.14) in dieser Arbeit). Setzt man diese Definition in Gleichung (5.13) ein

$$M(\mu) = L \frac{1}{3L} \frac{\langle f(\mu) \rangle}{\langle \mu f(\mu) \rangle} \left(\frac{f(\mu)}{\langle f(\mu) \rangle} - 1 \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{\langle \mu f(\mu) \rangle} (f(\mu) - \langle f(\mu) \rangle) \quad (5.14)$$

$$\text{mit} \quad g_0 = \langle f(\mu) \rangle \quad \text{und} \quad g_1 = 3 \langle \mu f(\mu) \rangle = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \mu f(\mu) d\mu$$

so zeigt sich, daß die Definition (5.13) identisch mit der Definition (5.15) ist.

Es ist daher festzuhalten, daß sowohl die Definition (5.15) als auch die Definition (5.17) dem Zweck genügen, eine lokale Meßgröße zu definieren, die durch die lokalen Ausbreitungsbedingungen geprägt wird.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die Definition (5.15) vorgezogen, da der g_{1s} -Koeffizient bei einer stationären Lösung mit reflektierender Randbedingung unabhängig von den Ausbreitungsbedingungen ist und nur von der Stromdichte über die innere Grenze bestimmt wird. Durch die Normierung auf den g_{1s} -Koeffizienten erhält man somit im stationären Fall M_{ns} -Koeffizienten, die von der Anzahl der injizierten Teilchen unabhängig sind und deren Abhängigkeit von den Ausbreitungsbedingungen ausschließlich durch die g_{ns} -Koeffizienten mit $n > 1$ festgelegt ist.

5.2.1 Der Produktansatz des Pitchwinkelstreuoeffizienten

In Abschnitt 2.1.2 wurde für den PWSK ein Produktansatz gewählt, der den PWSK in einen von der räumlichen Streustärke und einen vom Pitchkosinus abhängigen Anteil aufspaltet (vgl. Gleichung (2.22)):

$$\kappa(s, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{\parallel}(s) \tilde{\kappa}(\mu)$$

Die theoretisch möglichen funktionalen Verläufe von $\kappa(s, \mu)$ werden dadurch deutlich eingeschränkt. Dennoch ist diese Beschränkung unter physikalischen Aspekten zu rechtfertigen, wie im folgenden gezeigt wird.

Zu diesem Zweck wird die stationäre Transportgleichung, wie schon im vorhergehenden Abschnitt, mit Hilfe eines Modellproblems untersucht (siehe Abbildung 5.2). Der räumlich abhängige Parameter ist der PWSK, der am Ort $s_1 = 2.5$ AU (gestrichelte Linie) eine abrupte Veränderung erfährt. Links von der gestrichelten Linie, d. h. für $s < 2.5$ AU, betragen die Parameter des PWSK $\hat{q} = 1$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$, rechts davon, d. h. für $s > 2.5$ AU, nehmen die Parameter die Werte $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ an. Der PWSK ändert somit seine Form von isotroper Pitchwinkelstreuung zu einer Form, die ein ausgeprägtes “resonance gap” aufweist. Eine räumliche μ -Abhängigkeit des PWSK läßt sich mit dem oben genannten Produktansatz nicht beschreiben. Es ist daher zu untersuchen, in welchen räumlichen Bereichen des Modellproblems der Produktansatz dennoch zu identischen Pitchwinkelverteilungen führt.

Das Verhältnis λ_{\parallel}/L wird mit $\lambda_{\parallel}/L = 1$ als konstant angenommen. Eine räumliche Variation der Streustärke und damit auch der mittleren freien Weglänge λ_{\parallel} entlang der Bogenlänge s wird anhand dieses Modellproblems nicht untersucht, da räumliche Änderungen der Streustärke zum einen bereits im vorhergehenden Abschnitt durchgeführt worden sind und zum anderen problemlos mit dem oben genannten Produktansatz dargestellt werden können.

Entsprechend der bisherigen Vorgehensweise soll auch in diesem Abschnitt zunächst die analytische Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen betrachtet werden. Um den Vergleich mit den Legendre-Koeffizienten der numerischen Lösung durchzuführen, ist es wiederum notwendig (vgl. vorhergehenden Abschnitt), die Verhältnisse $M_{ns} = g_{ns}/g_{1s}$ der analytischen Lösung zu bilden. Für das Verhältnis $M_{0s} = g_{0s}/g_{1s}$ ergibt sich dann aus den Gleichungen (A.12) und (A.13) im Anhang A:

$$\frac{g_{0s}}{g_{1s}} = \frac{L}{\lambda_{\parallel}} - \frac{1}{18} \frac{(\hat{q} - 4)^2}{2\hat{q} - 5} \frac{\lambda_{\parallel}}{L} \quad (5.18)$$

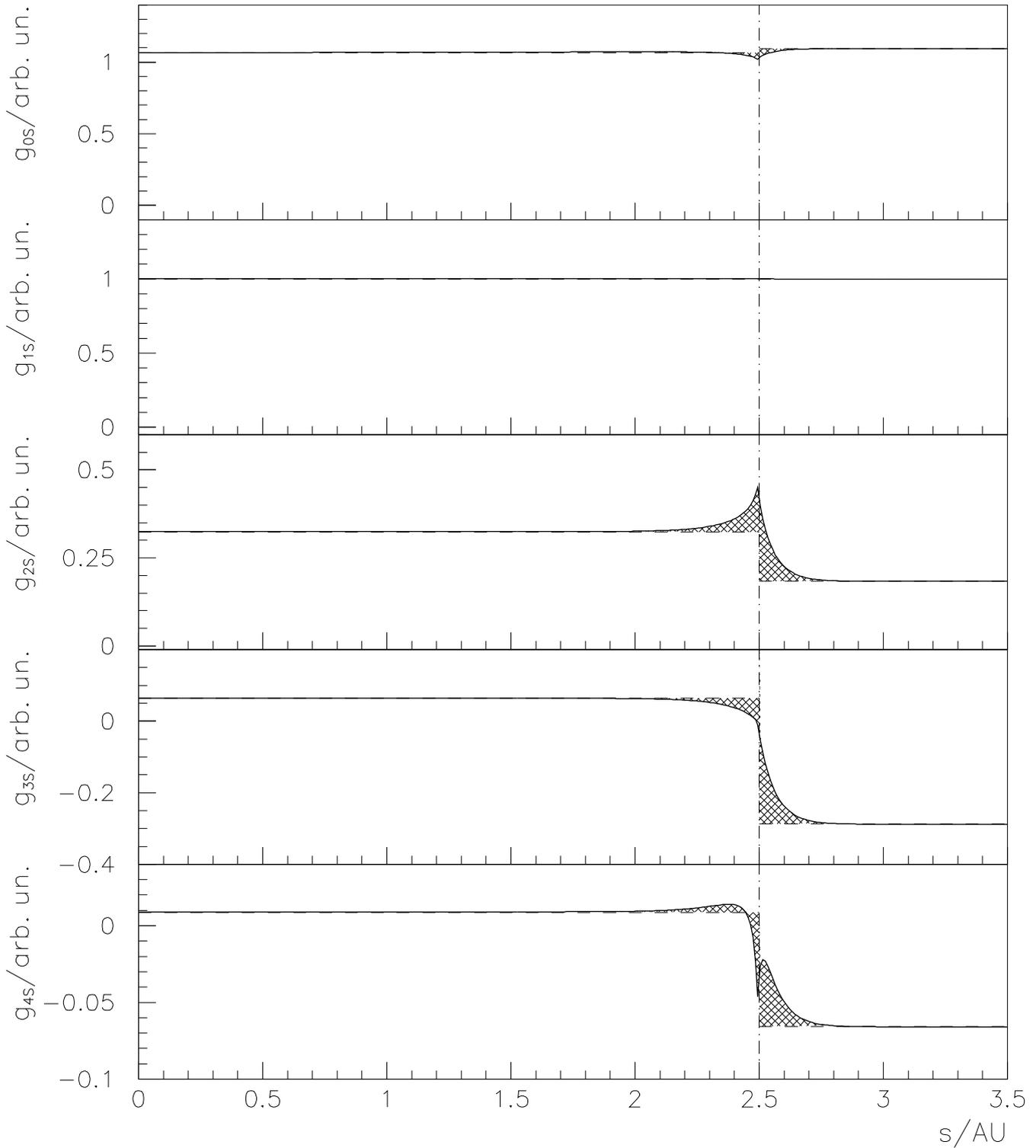


Abbildung 5.2: Die Legendre-Koeffizienten g_{0s} – g_{4s} der numerischen Lösung der vollständigen stationären PDGI (5.4) (durchgezogene Kurven) und der analytischen Lösung der Transportgleichung für konstante Ausbreitungsbedingungen (5.7) (gestrichelte Kurven) sind in ihrem räumlichen Verlauf dargestellt. Die Differenz beider Kurven ist als schraffierter Bereich kenntlich gemacht. Der PWSK hat links von der gestrichelten vertikalen Linie die Parameter $\hat{q} = 1$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$, rechts davon die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$. Das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ist räumlich konstant mit dem Wert $\lambda_{||}/L = 1$.

Es handelt sich hierbei um eine Näherung für $\lambda_{||}/L \lesssim 1$, die dazu dienen soll, ein Verständnis für die Abhängigkeit der Legendre-Koeffizienten und damit auch der M_{ns} -Koeffizienten von den Größen $\lambda_{||}/L$, \hat{q} (und $\hat{\sigma}$) zu entwickeln. Die tatsächlich in der Abbildung 5.2 eingetragenen Werte der Koeffizienten M_{ns} entstammen einer wesentlich genaueren Näherung, deren umfangreiche Terme jedoch eher verwirrend wirken, so daß aus didaktischen Gründen hier die einfachere Näherung vorzuziehen ist.

Aus Gleichung (5.18) wird deutlich, daß der M_{0s} -Koeffizient für $\lambda_{||}/L \lesssim 1$ im wesentlichen umgekehrt proportional zu $\lambda_{||}/L$ ist. Die Abhängigkeit von $\hat{q} \in [1, 2)$ ist nur gering, so daß es sich bei dem zweiten Term nur um einen Korrekturterm handelt. Für die stationäre Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen bedeutet dies, daß für $\lambda_{||}/L \lesssim 1$ nur eine schwache Abhängigkeit vom PWSK besteht. Ändert sich der PWSK räumlich, so hat dies auf den g_{0s} -Koeffizienten und damit auch auf den M_{0s} -Koeffizienten nur einen sehr geringen Einfluß. Es ist daher auch ohne Bedeutung, ob es sich dabei um globale Größen handelt oder nicht. Besteht keine Abhängigkeit von einer Größe, so kann natürlich auch keine globale Abhängigkeit bestehen.

Anders verhalten sich die M_{ns} -Koeffizienten mit $n > 1$. Wie man aus den Gleichungen (A.14)–(A.17) entnehmen kann, besteht eine Abhängigkeit von der Form des PWSK und damit von dem Parameter \hat{q} . In Abbildung 5.2 zeigt sich dies als deutlicher Sprung an der Stelle $s_1 = 2.5$ AU, wo sich der \hat{q} -Parameter abrupt von $\hat{q} = 1$ auf $\hat{q} = 1.6$ erhöht.

Zum Vergleich der analytischen Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen (gestrichelte horizontale Linien) mit der numerischen Lösung (durchgezogene Kurven) ist die Differenz zwischen beiden Lösungen durch Schraffur deutlich gemacht. Wegen der geringen Abhängigkeit des M_{0s} -Koeffizienten von der Form des PWSK unterscheiden sich die beiden Lösungen nur in der unmittelbaren Umgebung von $s_1 = 2.5$ AU, in der die Näherung $\partial\zeta_1/\partial s = 0$ zusammenbricht. Ansonsten ist auch bei der numerischen Lösung nur eine sehr geringe Abhängigkeit von dem sich räumlich ändernden PWSK festzustellen. Der g_{0s} -Koeffizient und damit auch der M_{0s} -Koeffizient verhalten sich daher bei räumlichen Änderungen des PWSK wie lokale Größen.

Bei den Legendre-Koeffizienten g_n mit $n > 1$ der numerischen Lösung ist wieder das bereits im vorhergehenden Abschnitt festgestellte lokale Verhalten zu beobachten. Befindet sich der Beobachter in hinreichendem Abstand zum Ort $s_1 = 2.5$ AU, an dem sich der PWSK ändert, so sind die Auswirkungen auf die g_{ns} -Koeffizienten nur äußerst gering und die M_{ns} -Koeffizienten können durch die analytische Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen beschrieben werden. In der unmittelbaren Umgebung von $s_1 = 2.5$ AU unterscheiden sich hingegen die analytische und die numerische Lösung deutlich voneinander. Die numerische Lösung ergibt sich in diesem Bereich durch eine Überlagerung der Effekte der zu beiden Seiten des Ortes $s_1 = 2.5$ AU unterschiedlichen PWSKs.

Daraus ergibt sich für den Produktansatz, daß dieser nur lokal gültig sein muß. In hinreichend großem Abstand ist die genaue Form des PWSK ohne Bedeutung. Wichtig ist nur die Streustärke des PWSK, nicht aber seine explizite Form. Die räumliche Änderung der Streustärke wird jedoch durch den Produktansatz berücksichtigt. Ist die Form des PWSK in der Umgebung des Beobachters, in der sich die lokalen Größen auf die Ausbreitungsbedingungen einstellen, konstant, so stellt der Produktansatz des PWSK eine angemessene Beschreibung der Ausbreitungsbedingungen dar. Problematisch wird es nur dann, wenn sich der Beobachter in der unmittelbaren Umgebung einer abrupten räumlichen Änderung der Ausbreitungsbedingungen befindet, wie sie in der Abbildung dargestellt ist. Hier ist es nicht

möglich, ohne zusätzliche Annahmen aus der beobachteten PWV auf die Ausbreitungsbedingungen zu schließen. Erfolgen die räumlichen Änderungen jedoch auf sehr kleinen Skalen und sind sie im statistischen Mittel gleichmäßig verteilt, so könnte man immerhin noch argumentieren, daß man einen effektiven PWSK aus den beobachteten PWVs bestimmen kann, der die Ausbreitung der Teilchen im Mittel beschreibt.

5.2.2 Die lokale und die globale mittlere freie Weglänge

Nachdem in Abschnitt 5.2 die lokalen und globalen Eigenschaften der Legendre-Koeffizienten und der aus ihnen abgeleiteten Größen behandelt worden sind, wird in diesem Abschnitt auf die aus diesen Größen abgeleitete mittlere freie Weglänge eingegangen.

Die lokalen M_{ns} -Koeffizienten können unter folgender Voraussetzung aus der stationären Lösung (2.65) für konstante Ausbreitungsbedingungen berechnet werden: Die Ausbreitungsbedingungen in der lokalen Umgebung, in der sich die M_{ns} -Koeffizienten auf die Ausbreitungsbedingungen einstellen, müssen konstant sein bzw. dürfen nur eine schwache räumliche Abhängigkeit aufweisen.

Die Voraussetzung ist damit zunächst unabhängig von dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ und gilt sowohl für schwache als auch für starke Streuung. Dennoch besteht ein indirekter Zusammenhang, da die Größe der lokalen Umgebung von dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ abhängig ist. Ist z. B. die Streuung im Verhältnis zur Fokussierung gering, d. h. $\lambda_{||}/L > 1$, so ist die lokale Umgebung relativ groß. Je größer die lokale Umgebung ist, desto schwieriger wird es aber, die Voraussetzung von konstanten Ausbreitungsbedingungen und damit auch einem konstanten Verhältnis $\lambda_{||}/L$ einzuhalten. Wie man in Abbildung 2.6 erkennt, variiert das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ besonders in der Nähe der Sonne sehr stark, so daß die lokale Umgebung sehr klein sein muß, damit zumindest annähernd konstante Ausbreitungsbedingungen vorherrschen. Dies ist jedoch gleichbedeutend mit sehr starker Streuung und damit mit einer sehr kleinen mittleren freien Weglänge, da die Fokussierungslänge $L(r)$ in ihrer großskaligen Abhängigkeit durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes festgelegt ist. Es ist der stochastische Prozeß der Pitchwinkelstreuung, der die Teilchen nach einer bestimmten zurückgelegten Wegstrecke immer wieder ihre "Vorgeschichte vergessen läßt".

Gilt nun die oben genannte Voraussetzung von konstanten Ausbreitungsbedingungen in der lokalen Umgebung, dann können aus der Pitchwinkelverteilung, z. B. mit Hilfe der M_{ns} -Koeffizienten, Rückschlüsse auf die lokalen Ausbreitungsbedingungen gezogen werden. Die so bestimmten Größen sind jedoch lokale Größen, die nur in der lokalen Umgebung des Beobachters Gültigkeit haben. Wird z. B. das Verhältnis $\lambda_{||}(r_1)/L(r_1)$ bestimmt, dann kann bei Kenntnis des Beobachtungsortes r_1 die Fokussierungslänge $L(r_1)$ nach Gleichung (2.11) berechnet werden, so daß man schließlich die lokale mittlere freie Weglänge $\lambda_{||}(r_1)$ erhält.

Dieser Sachverhalt wird im folgenden anhand eines Beispiels verdeutlicht. In den Abbildungen 5.3 und 5.4 sind die Legendre-Koeffizienten $g_{0s}-g_{4s}$ für drei stationäre Lösungen in ihrer radialen Abhängigkeit aufgetragen. Für die stationären Lösungen wurden unterschiedliche radiale Verläufe der radialen mittleren freien Weglänge λ_r (siehe Abschnitt 2.1.3) gewählt. Die gestrichelten Kurven entsprechen einem radialen Verlauf von $\lambda_r(r) = \lambda_0(r_1)/\sqrt{2}(r/r_0)^b$ mit $b = -0.5$, die durchgezogenen Kurven einem radialen Verlauf von $\lambda_r(r) = \lambda_0(r_1) = \text{const}$ und die gepunkteten Kurven einem radialen Verlauf von $\lambda_r(r) = \lambda_0(r_1)\sqrt{2}(r/r_0)^b$ mit $b = 0.5$. Durch die Wahl der radialen Verläufe von $\lambda_r(r)$ ergibt sich bei einem radialen Abstand von $r_1 = 0.5$ AU (gestrichelte vertikale Linie) dieselbe radiale mittlere freie Weglänge. Die ra-

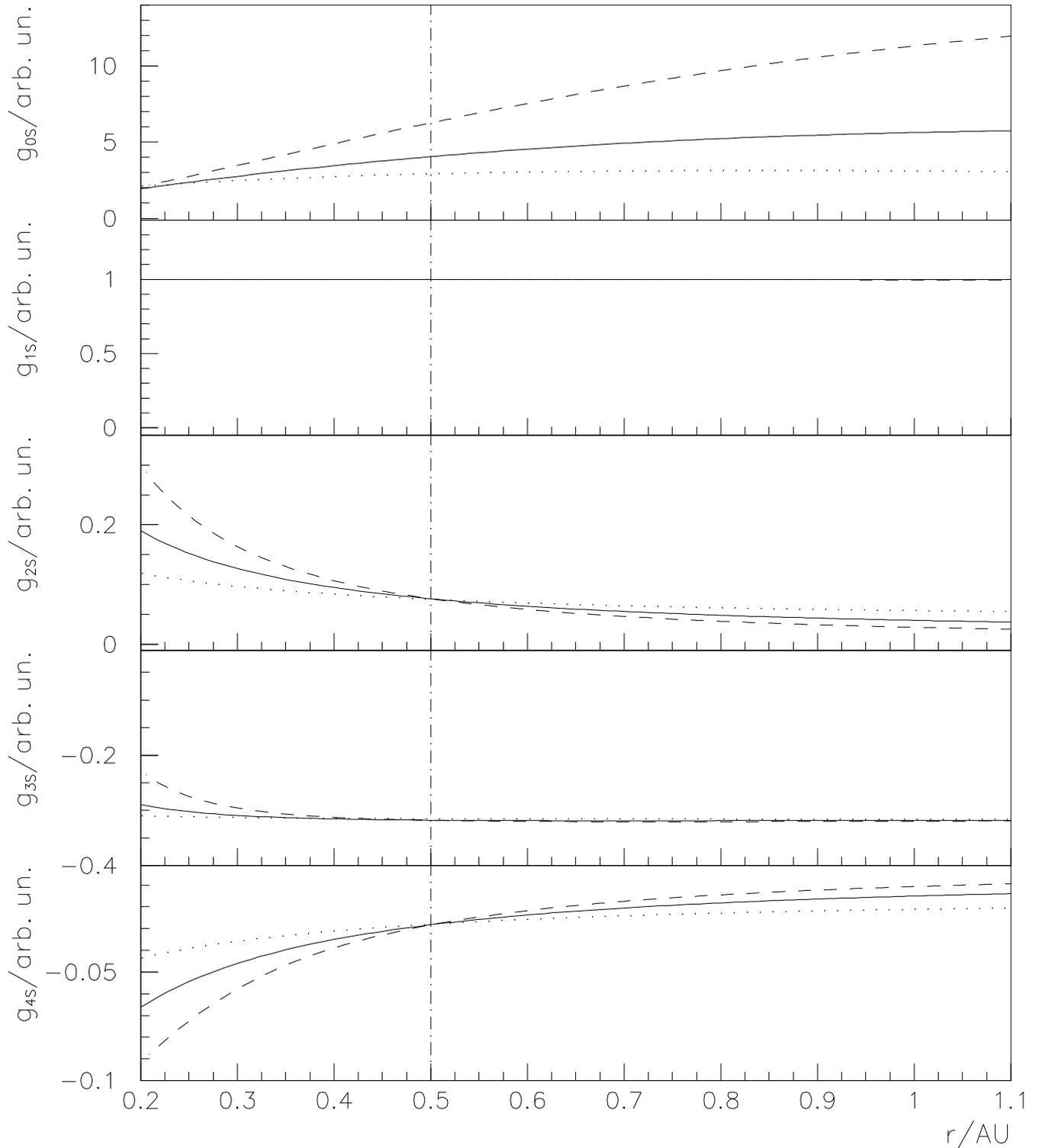


Abbildung 5.3: Die Legendre-Koeffizienten g_{0s} – g_{4s} der Lösung der vollständigen stationären PDGI (5.4) sind über dem radialen Abstand aufgetragen. Dabei wird zwischen folgenden radialen Abhängigkeiten der radialen mittleren freien Weglänge $\lambda_r \propto (r/r_0)^b$ unterschieden: $b = -0.5$ (gestrichelte Kurven), $b = 0$ (durchgezogene Kurven) und $b = 0.5$ (gepunktete Kurven). Es gilt für alle radialen Verläufe bei $r_1 = 0.5$ AU (gestrichelte vertikale Linie): $\lambda_r(r_1) = 0.1$ AU. Der PWSK ist konstant mit den Parametern $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

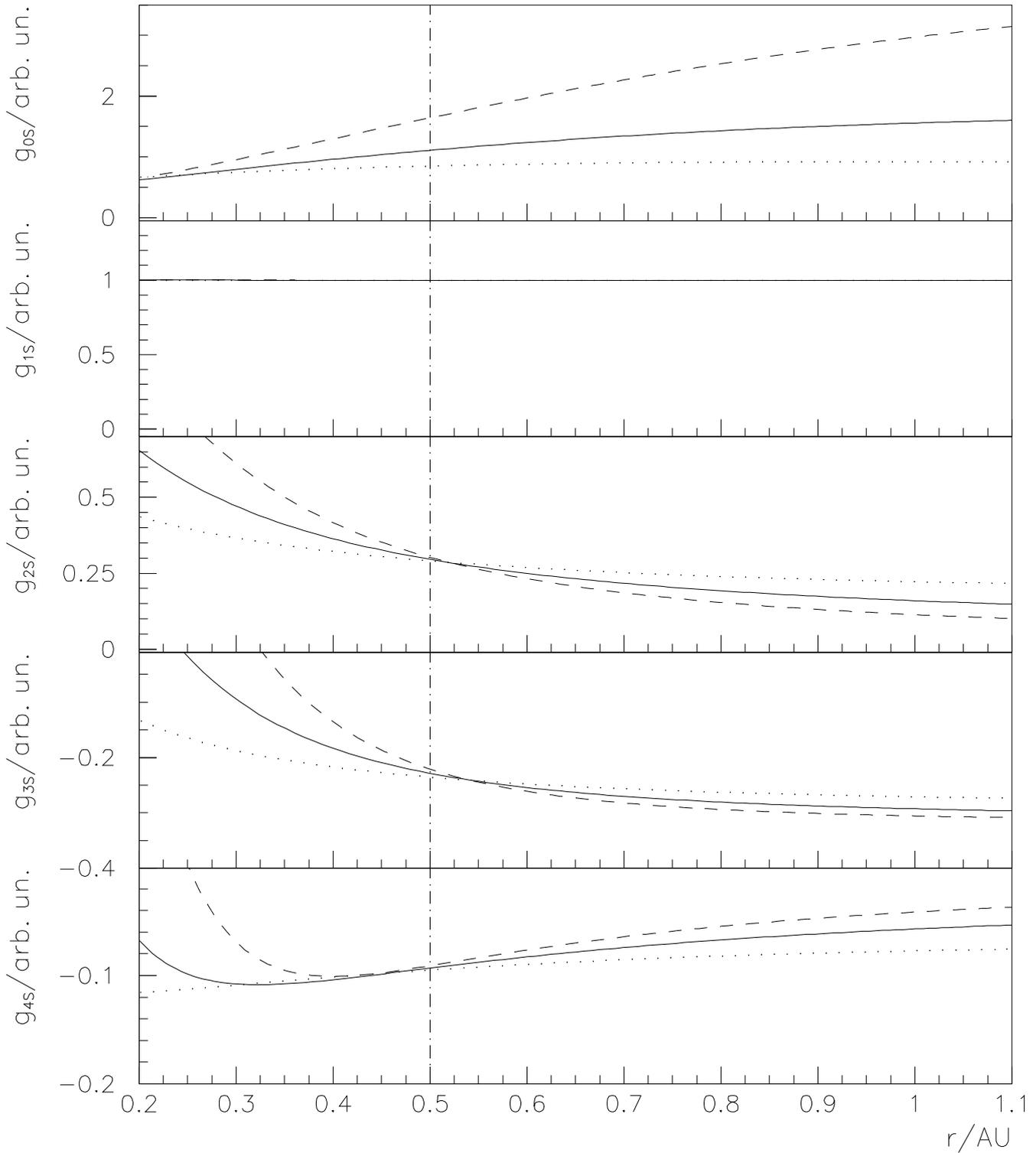


Abbildung 5.4: Die Legendre-Koeffizienten g_{0s} – g_{4s} der Lösung der vollständigen stationären PDGl (5.4) sind über dem radialen Abstand aufgetragen. Dabei wird zwischen folgenden radialen Abhängigkeiten der radialen mittleren freien Weglänge $\lambda_r \propto (r/r_0)^b$ unterschieden: $b = -0.5$ (gestrichelte Kurven), $b = 0$ (durchgezogene Kurven) und $b = 0.5$ (gepunktete Kurven). Es gilt für alle radialen Verläufe bei $r_1 = 0.5$ AU (gestrichelte vertikale Linie): $\lambda_r(r_1) = 0.4$ AU. Der PWSK ist konstant mit den Parametern $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

dialen mittleren freien Weglängen stimmen somit für diesen radialen Abstand lokal überein. Die stationären Lösungen der Abbildungen 5.3 und 5.4 unterscheiden sich dabei lediglich in der Stärke der Streuung. Für Abbildung 5.3 wurde $\lambda_0(r_1) = 0.1$ AU und für Abbildung 5.4 $\lambda_0(r_1) = 0.4$ AU gewählt. So kann mit Hilfe der Abbildung 5.3 der Fall lokaler starker Streuung, d. h. $\lambda_r(r = 0.5) = 0.1$ AU, und mit Abbildung 5.4 der Fall lokaler schwacher Streuung, d. h. $\lambda_r(r = 0.5) = 0.4$ AU, untersucht werden. Der PWSK wird für beide Abbildungen mit den Parametern $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ als räumlich konstant angenommen.

Betrachtet man zunächst den g_{0s} -Koeffizienten in beiden Abbildungen, so wird deutlich, daß sich am Ort $r_1 = 0.5$ AU trotz desselben Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ in Abhängigkeit vom radialen Verlauf der radialen mittleren freien Weglänge $\lambda_r(r)$ unterschiedliche Werte einstellen. Die Werte unterscheiden sich dabei um mehr als den Faktor zwei. Grund hierfür ist die globale Eigenschaft des g_{0s} -Koeffizienten, aus der sich eine Abhängigkeit von der großskaligen Variation des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ und damit vom radialen Verlauf der radialen mittleren freien Weglänge $\lambda_r(r)$ ergibt.

Der g_{0s} -Koeffizient nimmt dabei den größten Wert für $b = -0.5$ und den kleinsten Wert für $b = 0.5$ an. Betrachtet man Abbildung 2.3, in der die mittleren freien Weglängen $\lambda_{||}$ entlang der Magnetfeldlinie in Abhängigkeit von dem b -Parameter dargestellt sind, so zeigt sich, daß für $b = -0.5$ die Streuung mit größer werdendem radialen Abstand r weniger schnell abnimmt als für $b = 0.5$. Für den am Ort $r_1 = 0.5$ AU gemessenen g_{0s} -Koeffizienten bedeutet dies, daß für $b = -0.5$ mehr Teilchen aus dem Gebiet $s > 0.5$ AU zurückgestreut werden als für $b = 0.5$. Daraus folgt ein größerer Wert für den g_{0s} -Koeffizienten. Vergleicht man die g_{0s} -Koeffizienten der Abbildung 5.3 mit denen der Abbildung 5.4, so ergeben sich für die g_{0s} -Koeffizienten der Abbildung 5.3 insgesamt größere Werte, da die Streustärke dort um den Faktor vier größer ist als in der Abbildung 5.4. Für die Berechnung der stationären Lösung folgt daraus, daß sich die stationären Verhältnisse für $b = -0.5$ erst nach einer längeren Ausbreitungszeit als für den in Abschnitt 3.3 behandelten Fall von $b = 0$ einstellen.

Eine Bestimmung der lokalen radialen mittleren freien Weglänge aus der Messung des g_{0s} -Koeffizienten ist daher nur mit der Kenntnis des radialen Verlaufs $\lambda_r(r)$ möglich. Diese Information ist jedoch ohne zusätzliche Annahmen aus der an einem Ort gemessenen stationären Lösung nicht zu gewinnen (siehe Abschnitt 6.2.1). Unter der *globalen* mittleren freien Weglänge ist daher die radiale mittlere freie Weglänge zu verstehen, die man unter der Annahme eines bestimmten radialen Verlaufs von λ_r aus dem g_{0s} -Koeffizienten bzw. den aus dem g_{0s} -Koeffizienten abgeleiteten Größen ermittelt. Entspricht der angenommene radiale Verlauf von λ_r dem tatsächlichen radialen Verlauf, so kann mit Hilfe des g_{0s} -Koeffizienten die absolute Stärke der Streuung bestimmt werden. Ist die Annahme über den radialen Verlauf hingegen falsch, so sind die bestimmten mittleren freien Weglängen weder in ihrem radialen Verlauf noch in der sich lokal für den Beobachtungsort r_1 ergebenden radialen mittleren freien Weglänge $\lambda_r(r_1)$ zutreffend.

Nachdem die globale Eigenschaft des g_{0s} -Koeffizienten behandelt worden ist, wird nun auf die lokale Eigenschaft der g_{ns} -Koeffizienten mit $n > 1$ eingegangen. Betrachtet man die g_{ns} -Koeffizienten in ihrem radialen Verlauf, so ist zu erkennen, daß diese bei einem radialen Abstand von $r_1 = 0.5$ AU (fast) identische Werte annehmen. Da am Ort $r_1 = 0.5$ AU identische Ausbreitungsbedingungen herrschen, ist dies ein deutliches Zeichen dafür, daß die lokale Umgebung, auf der sich die g_{ns} -Koeffizienten auf die Ausbreitungsbedingungen einstellen, im Vergleich zu der räumlichen Änderung der Ausbreitungsbedingungen am Ort $r_1 = 0.5$ AU klein ist. Die Teilchen sind in der lokalen Umgebung (fast) konstanten Ausbreitungsbedin-

gungen ausgesetzt, die für die drei hier ausgewählten stationären Lösungen sehr ähnlich sind. Es wäre somit möglich, aus der am Ort $r_1 = 0.5$ AU gemessenen PWV das lokale Verhältnis $\lambda_{||}/L$ und damit die lokale mittlere freie Weglänge $\lambda_{||}(r_1)$ zu bestimmen.

Ist die radiale mittlere freie Weglänge λ_r am Ort $r_1 = 0.5$ AU größer als in Abbildung 5.3, so wächst damit auch die lokale Umgebung an. Je größer jedoch die lokale Umgebung wird, desto stärker machen sich die räumlichen Änderungen der Ausbreitungsbedingungen bemerkbar. Die Auswirkungen einer größeren lokalen Umgebung auf die g_{ns} -Koeffizienten mit $n > 1$ sind in Abbildung 5.4 zu erkennen. Während in Abbildung 5.3 am Ort $r_1 = 0.5$ AU fast perfekte Übereinstimmung der g_{ns} -Koeffizienten vorzufinden ist, machen sich hier die unterschiedlichen räumlichen Ausbreitungsbedingungen bemerkbar. Dieser Unterschied der g_{ns} -Koeffizienten am Ort $r_1 = 0.5$ AU wird um so größer, je größer die lokale mittlere freie Weglänge $\lambda_{||}$ bzw. je schwächer die Streuung gewählt wird. Zusätzlich ist natürlich zu beachten, daß die g_{ns} -Koeffizienten unterschiedlich stark von den Ausbreitungsänderungen abhängig sind. Ist ein bestimmter g_{ns} -Koeffizient z. B. nur schwach von dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ abhängig, wie dies in Abbildung 5.3 für den g_{3s} -Koeffizienten gilt, so können die g_{ns} -Koeffizienten über einen großen räumlichen Bereich (trotz sich ändernder Ausbreitungsbedingungen) übereinstimmen.

5.3 Die Näherung der stationären Transportgleichung

In Abschnitt 5.2 ging es im wesentlichen darum, die lokalen und globalen Eigenschaften der Legendre-Koeffizienten für stationäre Verhältnisse kenntlich zu machen. Dabei kam es bereits für verschiedene Modellprobleme zum Vergleich zwischen den numerischen Lösungen der vollständigen stationären PDGl (5.4) und den analytischen Lösungen der stationären PDGl (5.7) für konstante Ausbreitungsbedingungen. In diesem Abschnitt wird nun für realistische Ausbreitungsbedingungen untersucht, in welchem Bereich die Lösungen der PDGl (5.7) als Näherungslösungen für die PDGl (5.4) verwendet werden dürfen (vgl. HATZKY AND WIBBERENZ [1995]). Unter realistischen Ausbreitungsbedingungen ist zum einen eine Fokussierungslänge L zu verstehen, die sich nach Gleichung (2.11) aus der Archimedischen Spirale des interplanetaren Magnetfeldes ergibt, und zum anderen eine radiale mittlere freie Weglänge λ_r , die als konstant angenommen wird. Das für die Lösungen der PDGl (5.7) wichtige Verhältnis $\lambda_{||}(s)/L(s)$ ist in Abbildung 2.6 für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.1$ AU aufgetragen. Multiplikation der Funktionswerte mit den Faktoren 2, 3, ... ermöglicht es, die Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.2$ AU, 0.3 AU, ... zu ermitteln. Die Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw} im Bereich 300–500 km/s ist dabei ein Parameter, von dem das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ und damit die Lösungen der PDGl (5.7) für $r \leq 1$ AU nur geringfügig abhängen. Der im folgenden durchzuführende Vergleich zwischen der Lösung der PDGl (5.4) und der PDGl (5.7) wird daher exemplarisch für eine Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 400$ km/s durchgeführt. Die Form des PWSK ist von geringerer Bedeutung, da es bei der Überprüfung der Näherung der PDGl (5.4) auf die sich räumlich ändernden Ausbreitungsbedingungen ankommt, die die Größenordnung des zu vernachlässigenden Terms $v\mu\partial\zeta_1/\partial s$ bestimmen.

In Abbildung 5.5 sind die M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ über dem radialen Abstand r aufgetragen. Die durchgezogenen Kurven stellen die numerisch berechneten stationären Lösungen der PDGl (5.4) für die oben angegebenen Ausbreitungsbedingungen dar, wobei ein PWSK mit den Parametern $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ verwendet wurde. Die

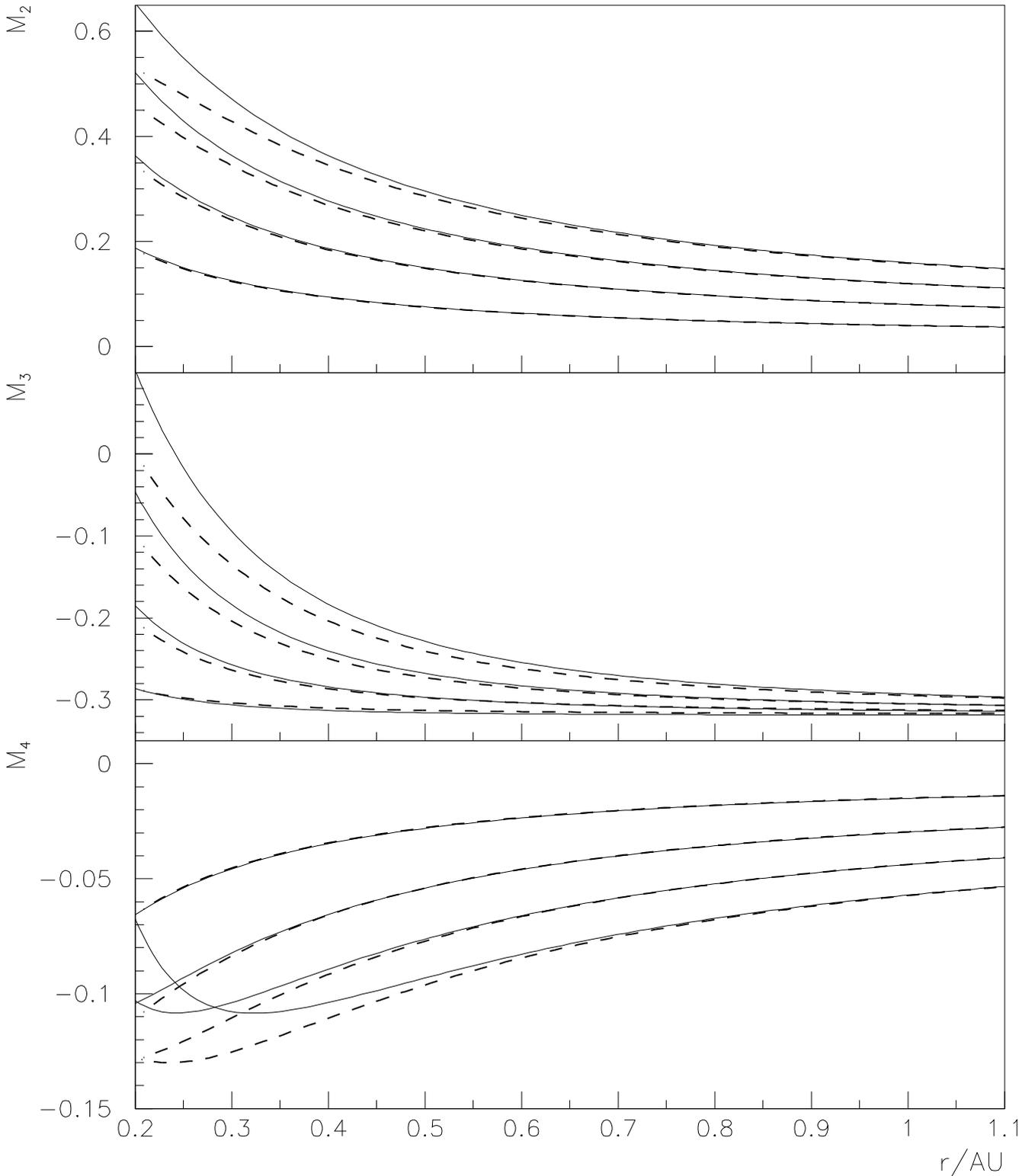


Abbildung 5.5: Die M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ der Lösung der vollständigen PDGI (5.4) (durchgezogene Kurven) und der Lösung der genäherten PDGI (5.5) (gestrichelte Kurven) sind über dem radialen Abstand aufgetragen. Die radiale mittlere freie Weglänge nimmt mit zunehmendem Betrag der M_{ns} -Koeffizienten die Werte $\lambda_r = 0.1$ AU, 0.2 AU, 0.3 AU und 0.4 AU an. Der PWSK ist konstant mit den Parametern $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

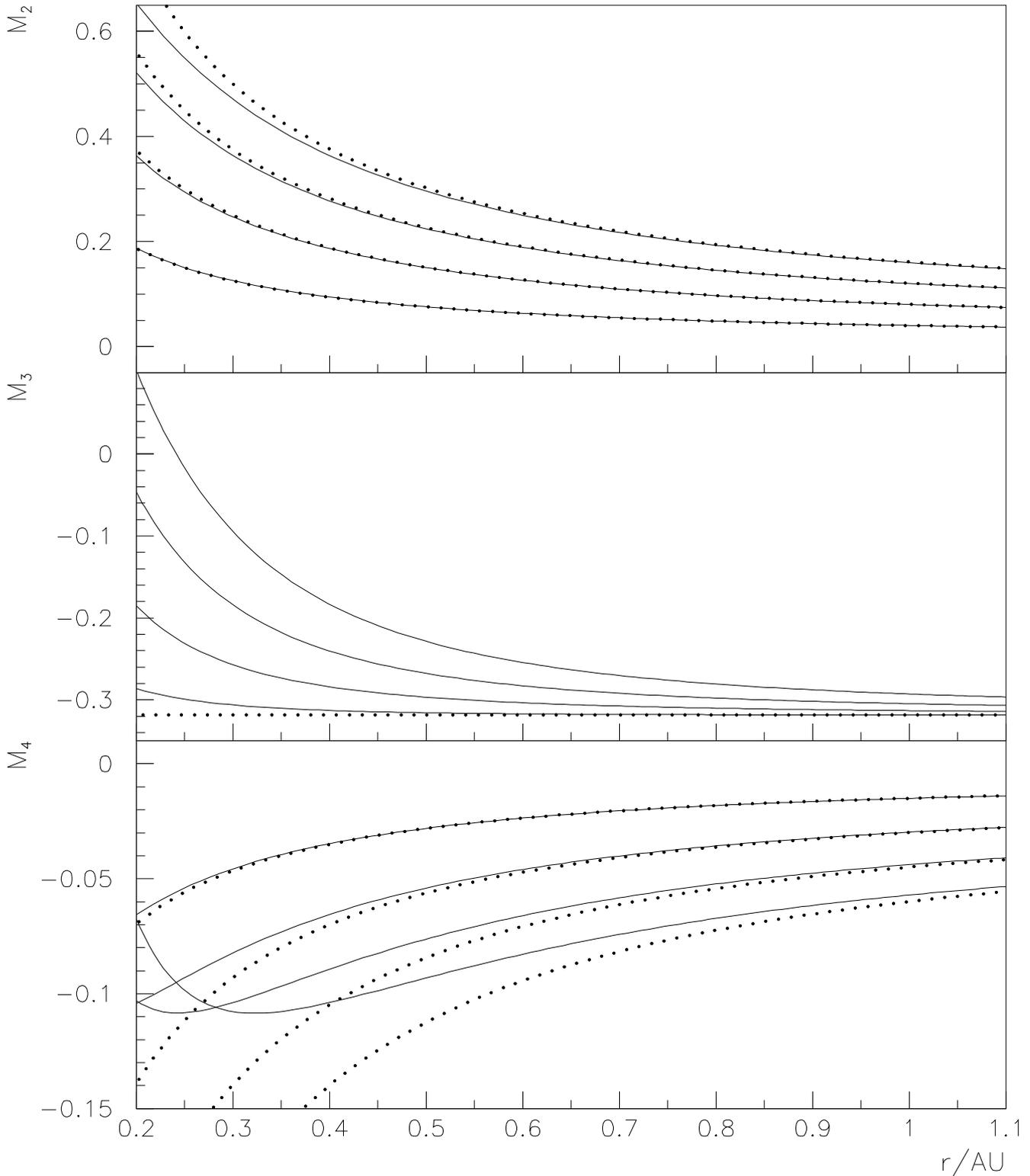


Abbildung 5.6: Die M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ der Lösung der vollständigen PDGl (5.4) (durchgezogene Kurven) und der Näherung der Lösung der genäherten PDGl (5.5), berechnet aus den Gleichungen (A.13)–(A.16) im Anhang A, (gepunktete Kurven) sind über dem radialen Abstand aufgetragen. Die radiale mittlere freie Weglänge nimmt mit zunehmendem Betrag der M_{ns} -Koeffizienten die Werte $\lambda_r = 0.1$ AU, 0.2 AU, 0.3 AU und 0.4 AU an. Der PWSK ist konstant mit den Parametern $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

gestrichelten Kurven bezeichnen die entsprechenden Näherungslösungen, die sich aus der analytischen Lösung (2.65) der PDGI (5.7) für konstante Ausbreitungsbedingungen ergeben. Dabei wurde für jeden Ort s entlang der Bogenlänge der Magnetfeldlinie das lokale Verhältnis $\lambda_{||}(s)/L(s)$ in die Lösung (2.65) eingesetzt. Als weiterer Parameter tritt die radiale mittlere freie Weglänge λ_r auf, die folgende Werte annimmt: $\lambda_r = 0.1$ AU, 0.2 AU, 0.3 AU und 0.4 AU. Es ergeben sich somit für jeden M_{ns} -Koeffizienten vier verschiedene Kurven, die sich im Betrag des M_{ns} -Koeffizienten unterscheiden. Je schwächer die Streuung ist, desto gebündelter sind die PWVs und desto größer sind die Beträge der M_{ns} -Koeffizienten für einen bestimmten radialen Abstand.

Vergleicht man die durchgezogenen mit den gestrichelten Kurven, so ist für eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.1$ AU eine sehr gute Übereinstimmung in dem hier betrachteten radialen Bereich von 0.2 AU bis 1.1 AU zu verzeichnen. Die lokale Umgebung, in der sich die M_{ns} -Koeffizienten auf die Ausbreitungsbedingungen einstellen, ist für $\lambda_r = 0.1$ AU noch so klein, daß das sich räumlich ändernde Verhältnis $\lambda_{||}/L$ in der lokalen Umgebung in sehr guter Näherung als konstant angenommen werden kann. Betrachtet man hingegen die Kurven mit $\lambda_r \geq 0.2$ AU, so wird deutlich, daß die Übereinstimmung zwischen durchgezogenen und gestrichelten Kurven mit zunehmender mittlerer freier Weglänge für kleine radiale Abstände immer schlechter wird. Dies ist unmittelbar einsichtig, wenn man den radialen Verlauf des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ in Abbildung 2.6 betrachtet. Das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ändert sich für geringe radiale Abstände bereits auf sehr kleinen räumlichen Skalen, da sich die Fokussierungslänge in diesem Bereich in etwa umgekehrt proportional zum radialen Abstand verändert. Weitet sich nun die lokale Umgebung aufgrund der schwächer werdenden Pitchwinkelstreuung aus, so wird die Voraussetzung von konstanten Ausbreitungsbedingungen in der lokalen Umgebung zunächst nur für kleine radiale Abstände verletzt. Die Diskrepanz zwischen den durchgezogenen und den gestrichelten Kurven ist für $\lambda_r = 0.4$ AU und $r = 0.2$ AU bereits deutlich zu erkennen. Für $r = 1.1$ AU ergibt sich hingegen für die gleiche mittlere freie Weglänge eine sehr gute Übereinstimmung beider Kurven.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die aus der analytischen Lösung (2.65) abgeleiteten M_{ns} -Koeffizienten für $\lambda_r \leq 0.1$ AU in dem radialen Intervall $[0.2 \text{ AU}, 1.1 \text{ AU}]$ die M_{ns} -Koeffizienten der Lösung der vollständigen stationären PDGI (5.4) in sehr guter Näherung approximieren. Selbst für radiale mittlere freie Weglängen von $\lambda_r \leq 0.4$ AU und radiale Abstände mit $r \geq 0.5$ AU beträgt die Differenz weniger als 10 %. Erst bei kleinen radialen Abständen **und** großen mittleren freien Weglängen ergeben sich deutliche Abweichungen der M_{ns} -Koeffizienten der Lösungen der PDGIs (5.4) und (5.7).

Werden die Beobachtungen beispielsweise auf der Erde bzw. in deren unmittelbarer Umgebung gemacht [BIEBER AND POMERANTZ, 1985; BIEBER, EVENSON, AND POMERANTZ, 1986], so ist der durch die Näherung gemachte Fehler klein, wenn das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ nicht zu groß wird. Dies trifft auf jeden Fall für die von BIEBER AND POMERANTZ [1985] bestimmten Verhältnisse von $\lambda_{||}/L \leq 0.35$ für die Langzeitvariation von Teilchen mit einer Steifigkeit von 10 GeV zu. Anders sieht es jedoch für das von BIEBER, EVENSON, AND POMERANTZ [1986] untersuchte solare Ereignis vom 16. Februar 1984 aus. Sowohl die Auswertung von Protonen mit ≈ 50 MeV, beobachtet auf dem ICE-Satelliten, als auch die Auswertung von Teilchen mit einer Steifigkeit von ≈ 1 GeV, indirekt beobachtet mit Neutronenmonitoren, führen zu einem Verhältnis $\lambda_{||}/L \geq 2$. Die Argumentation der Autoren, daß das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ nur lokal konstant sein muß, ist im Prinzip zwar korrekt; nur wird die lokale Umgebung, auf der sich die Teilchen auf die Ausbreitungsbedingungen einstellen, so groß, daß sich die

räumliche Abhängigkeit des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ deutlich bemerkbar macht. Die Vermutung der Autoren, daß sich die räumlichen Abhängigkeiten der mittleren freien Weglänge und der Fokussierungslänge in etwa gegenseitig aufheben, ist daher über einen so großen räumlichen Bereich nicht aufrechtzuerhalten.

Verschärft wird diese Problematik natürlich noch, wenn der Beobachtungsort r_1 dichter an die Sonne verlegt wird, d. h. $r_1 < 1$ AU [BEECK AND WIBBERENZ, 1986; BEECK, 1987; BEECK AND WIBBERENZ, 1987; BEECK AND WIBBERENZ, 1990; KRAHMANN, 1991]. So ermitteln z. B. BEECK AND WIBBERENZ [1986] für das auf dem HELIOS 1-Satelliten bei einem radialen Abstand von $r_1 = 0.52$ AU gemessene solare Ereignis für Protonen von 4–13 MeV ein Verhältnis von $\lambda_{||}/L = 2.0 \pm 0.34$. Die gemessenen Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ sind damit ungefähr so groß wie die von BIEBER, EVENSON, AND POMERANTZ [1986] ermittelten Verhältnisse. Der Beobachtungsort befindet sich jedoch nur halb so weit von der Sonne entfernt. Bei der Auswertung eines weiteren Ereignisses ermitteln BEECK AND WIBBERENZ [1986] bei einem radialen Abstand von $r_1 = 0.49$ AU für auf dem HELIOS 2-Satelliten gemessene Elektronen des E03-Kanals ein Verhältnis von $\lambda_{||}/L \leq 0.09$. Die Näherung der Lösung der vollständigen stationären PDGI ist somit für dieses Ereignis gerechtfertigt.

Für den Fall eines kleinen Verhältnisses $\lambda_{||}/L \lesssim 1$ lassen sich die Legendre-Koeffizienten der Lösung der PDGI (5.7) für den PWSK des Standardmodells aus Gleichung (2.17) ebenfalls gut durch eine Näherung beschreiben. Es handelt sich somit um die “Näherung der Näherung” der Lösung der PDGI (5.4), die eine Erweiterung der von BEECK AND WIBBERENZ [1986] vorgestellten Näherung um den Parameter $\hat{\sigma}$ der Polarisation darstellt. Die entsprechenden Legendre-Koeffizienten sind im Anhang A unter den Gleichungen (A.12)–(A.17) aufgeführt.

In Abbildung 5.6 sind nun die dazugehörigen M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ (gepunktete Kurven) zusammen mit den M_{ns} -Koeffizienten der Lösung der vollständigen stationären PDGI (5.4) (durchgezogene Kurven) über dem radialen Abstand aufgetragen. Die Ausbreitungsbedingungen sind dabei dieselben wie in Abbildung 5.5. Dabei zeigt sich, daß für $\lambda_r = 0.1$ AU eine gute Übereinstimmung der gepunkteten und durchgezogenen Kurven für alle M_{ns} -Koeffizienten besteht. Die “Näherung der Näherung” läßt sich damit durchaus für kleine Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ verwenden. Selbst für große Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ wird der M_{2s} -Koeffizient der Lösung der vollständigen stationären PDGI (5.4) gut approximiert. Anders sieht es hingegen für kleine radiale Abstände und große Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ bei den M_{3s} - und M_{4s} -Koeffizienten aus. Speziell für den M_{3s} -Koeffizienten ergeben sich unterschiedliche Funktionsverläufe, da die “Näherung der Näherung” des M_{3s} -Koeffizienten keine Abhängigkeit vom Verhältnis $\lambda_{||}/L$ aufweist.

5.3.1 Die Eigenschaften der normierten Verteilungsfunktion

Im vorhergehenden Abschnitt ist deutlich geworden, daß die normierte Verteilungsfunktion $M(\mu)$ der PDGI (5.7) für starke Pitchwinkelstreuung, d. h. bei kleiner mittlerer freier Weglänge, eine sehr gute Näherung der normierten Verteilungsfunktion der vollständigen stationären PDGI (5.4) abgibt. Die normierte Verteilungsfunktion der PDGI (5.7) hat den Vorzug, daß der Zusammenhang zwischen dem PWSK und dem funktionalen Verlauf von $M(\mu)$ über die Gleichung (2.65) gegeben ist. Es bietet sich die Möglichkeit, für verschiedene PWSKs die normierten Verteilungsfunktionen zu berechnen, um so ein qualitatives Verständnis des Einflusses der μ -Abhängigkeit des PWSK und der daraus resultierenden Form der PWVs zu entwickeln. In Abbildung 2.2 wurden bereits sechs verschiedene $\bar{\kappa}(\mu)$ -Verläufe vor-

gestellt, deren normierte Verteilungsfunktionen in Abbildung 5.7 dargestellt sind. Ein freier Parameter ist dabei das Verhältnis $\lambda_{||}/L$, das in Abbildung 5.7 für die durchgezogenen Kurven $\lambda_{||}/L = 0.1$ und für die gestrichelten Kurven $\lambda_{||}/L = 1$ beträgt. Das Verhältnis zwischen mittlerer freier Weglänge und Fokussierungslänge variiert somit zwischen den beiden Kurvenscharen um den Faktor 10.

Es soll zunächst die normierte Verteilungsfunktion für den einfachsten Fall, den der isotropen Pitchwinkelstreuung in Abbildung 5.7 a) betrachtet werden. Ist das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ klein, so stellt sich ein nahezu linearer Verlauf ein. Die normierte Verteilungsfunktion $M(\mu)$ wird demnach durch den M_{1s} -Koeffizienten dominiert, der definitionsgemäß gleich eins ist. Die Beiträge der M_{ns} -Koeffizienten mit $n > 1$ sind hingegen verschwindend gering. Dies ändert sich, wenn die Streuung im Verhältnis zur Fokussierung geringer wird, da die Fokussierung zu einer stärkeren Bündelung der PWV führt und somit den Pitchkosinus der Teilchen systematisch zu größeren Werten drängt. Die normierte Verteilungsfunktion nähert sich daher in ihrer μ -Abhängigkeit einer Exponentialfunktion an. BIEBER AND POMERANTZ [1985] sprechen auch von der sogenannten "exponential anisotropy". Für die M_{ns} -Koeffizienten mit $n > 1$ bedeutet dies, daß sie deutlich von null verschiedene Werte annehmen. Der exakte quantitative Zusammenhang zwischen dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ und den M_{ns} -Koeffizienten ist den Gleichungen (A.6)–(A.9) im Anhang A zu entnehmen.

Die Auswirkungen eines ausgeprägten "resonance gap" im PWSK auf den Verlauf der normierten Verteilungsfunktion lassen sich in Abbildung 5.7 b) erkennen. Die Nullstelle im PWSK für $\mu = 0$ hat zur Folge, daß die Steigung der normierten Verteilungsfunktion in diesem Punkt unendlich wird. Dies bedeutet, daß der in Gleichung (3.53) definierte Diffusionswiderstand in der Umgebung von $\mu = 0$ einen sehr hohen Wert erreicht. Der Verlauf der normierten Verteilungsfunktion wird dadurch in die typische S-Form gezwungen, die in Abbildung 5.7 b) zu erkennen ist. An dieser S-Form ändert das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ im wesentlichen nichts. Große Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ führen lediglich dazu, daß die Punktsymmetrie bezüglich $\mu = 0$, die schon in Abbildung 5.7 a) für $\lambda_{||}/L = 0.1$ zu beobachten war, aufgehoben wird, da es relativ gesehen mehr Teilchen mit einem größeren Pitchkosinus gibt.

In den Abbildungen 5.7 c) und d) sind die Auswirkungen der Form des "resonance gap" zu erkennen. Die Steigung der normierten Verteilungsfunktion bleibt für beide PWSKs endlich, da die PWSKs keine Nullstellen aufweisen. Der Diffusionswiderstand nimmt aber auch bei diesen PWSKs den größten Wert im Intervall um $\mu = 0$ an, so daß sich wieder die typische S-Form einstellt. Bemerkenswert ist, daß die normierten Verteilungsfunktionen in den Abbildungen 5.7 b), c) und d) in etwa die gleichen M_{2s} - und M_{3s} -Koeffizienten haben (siehe Abschnitt 5.3.3). Die unterschiedliche Steigung im Bereich $\mu = 0$ macht sich erst bei den M_{ns} -Koeffizienten mit $n > 3$ bemerkbar. Die M_{ns} -Koeffizienten stellen somit ein objektives Maß dar, um normierte Verteilungsfunktionen untereinander zu vergleichen, auch wenn die zur Verfügung stehende Information über die μ -Abhängigkeit durch die Meßmethode begrenzt ist. Die Entwicklung nach Legendre-Koeffizienten, aus denen die M_{ns} -Koeffizienten abgeleitet sind, mag zwar auf den ersten Blick etwas mathematisch motiviert sein, hat aber den entscheidenden Vorteil, daß die Information, die in einer PWV enthalten ist, in Form von wenigen Koeffizienten vorliegt. Die Legendre-Koeffizienten speichern dabei jeder für sich gesehen einen Teil der Information, der wegen der Orthogonalität der Legendre-Polynome nicht durch einen der anderen Legendre-Koeffizienten ersetzt werden kann.

Wie bereits bei der Diskussion der Abbildung 5.7 b) bemerkt, führt auch in den Abbildungen 5.7 c) und d) ein größeres Verhältnis $\lambda_{||}/L$ zu einer Verschiebung der Verteilung hin

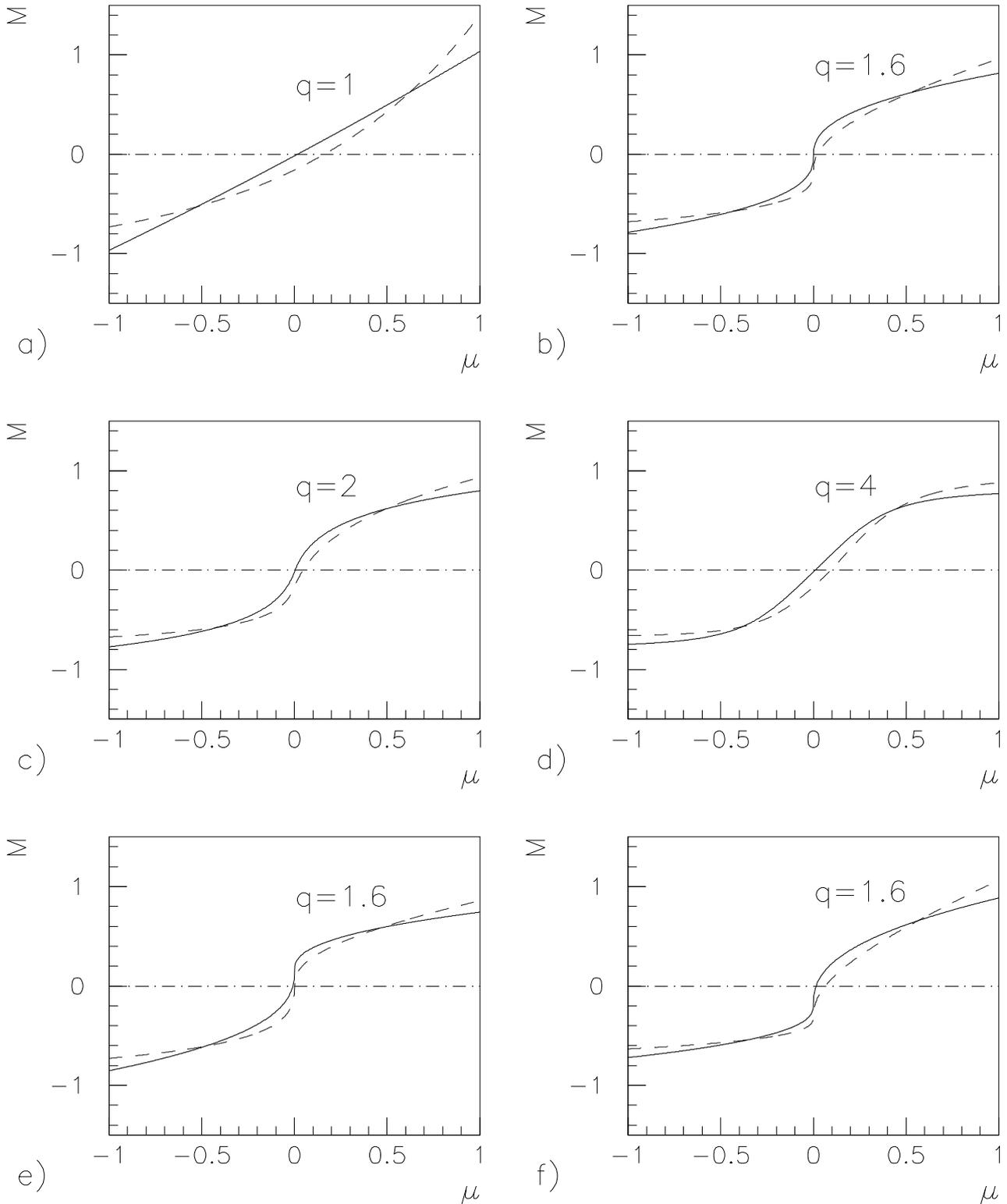


Abbildung 5.7: Die durch die Gleichung (5.15) definierte normierte Verteilungsfunktion $M(\mu)$ ist für die in Abbildung 2.2 dargestellten normierten PWSKs $\bar{\kappa}(\mu)$ berechnet: a) isotroper PWSK, d. h. $\hat{q} = 1$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$; b) $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$; c) $\hat{q} = 2$, $H = 0.05$ und $\hat{\sigma} = 0$; d) $\hat{q} = 4$, $H = 0.05$ und $\hat{\sigma} = 0$; e) $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = -0.3$; f) $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0.3$. Es wird zwischen einem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ von $\lambda_{||}/L = 0.1$ (durchgezogene Kurven) und $\lambda_{||}/L = 1$ (gestrichelte Kurven) unterschieden.

zu größeren Pitchkosinussen, wobei, wie auch im Fall eines isotropen PWSK, die Nullstelle der normierten Verteilungsfunktion erkennbar zu Werten $\mu > 0$ wandert.

Bei den bisher betrachteten PWSKs handelt es sich ausschließlich um symmetrische Formen. Abschließend werden daher noch zwei Beispiele für normierte Verteilungsfunktionen vorgestellt, die durch unsymmetrische PWSKs geprägt sind. In Abbildung 5.7 e) ist die normierte Verteilungsfunktion dargestellt, die sich für einen PWSK mit verstärkter Streuung in dem Halbraum $\mu \in (0, 1]$ ergibt. Das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ist dabei dasselbe wie in den bisher betrachteten Beispielen. Die Streuung verteilt sich damit nur unterschiedlich auf die beiden Halbräume $[-1, 0)$ und $(0, 1]$. Für die normierte Verteilungsfunktion bedeutet dies eine geringere Steigung im Intervall $(0, 1]$ und eine stärkere Steigung im Intervall $[-1, 0)$. Die Pitchwinkelstreuung ist immer bestrebt, den Gradienten, der durch den systematischen Effekt der Fokussierung entsteht, auszugleichen. Ist nun die Streuung in einem Halbraum im Verhältnis zum anderen Halbraum stärker, so ist dies vergleichbar mit zwei unterschiedlich großen Verhältnissen $\lambda_{||}/L$ für beide Halbräume. In Abbildung 5.7 f) kehrt sich dieser Effekt genau um, da nun die Streuung in dem Halbraum $[-1, 0)$, d. h. für Teilchen, die in Richtung zur Sonne fliegen, stärker ist. Die normierte Verteilungsfunktion nimmt daher in dem Intervall $[-1, 0)$ eine geringere und in dem Intervall $(0, 1]$ eine stärkere Steigung an als für den Fall eines symmetrischen PWSK. Die Asymmetrie der normierten Verteilungsfunktion, die durch ein großes Verhältnis $\lambda_{||}/L$ betont wird, verstärkt sich also noch zusätzlich durch den unsymmetrischen PWSK, der in Abbildung 2.2 e) dargestellt ist. Andererseits schwächt der in Abbildung 2.2 f) dargestellte PWSK die Asymmetrie der normierten Verteilungsfunktion ab. Weitere Beispiele für normierte Verteilungsfunktionen und deren zugrundeliegende PWSKs können bei BEECK AND WIBBERENZ [1986] in den Abbildungen 1 und 2 betrachtet werden.

5.3.2 Der PWSK des Standardmodells

In diesem Abschnitt soll speziell auf die Abhängigkeit der Legendre-Koeffizienten von dem PWSK des Standardmodells (siehe Gleichung (2.17)) eingegangen werden. Die Betrachtung soll dabei auf ein Verhältnis $\lambda_{||}/L \lesssim 1$ beschränkt werden, da in diesem Fall die bereits in Abschnitt 5.3 erwähnte Näherung der Lösung (2.65) ihre Gültigkeit besitzt. Die Entwicklung der Exponentialfunktion der Lösung (2.65) in einer Taylorreihe bis zum quadratischen Glied hat den Vorzug, daß der Zusammenhang zwischen den Legendre-Koeffizienten g_{ns} und den Größen $\lambda_{||}/L$, \hat{q} und $\hat{\sigma}$ deutlich wird. Es zeigt sich dabei, daß die einzelnen Legendre-Koeffizienten nicht in gleicher Weise von allen drei Größen abhängen.

Betrachtet man zunächst die Abhängigkeit der in Anhang A in den Gleichungen (A.12)–(A.17) aufgeführten Legendre-Koeffizienten g_{0s} – g_{5s} von dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$, so wird deutlich, daß alle Legendre-Koeffizienten bis auf den g_{0s} -Koeffizienten in ihren Termen von dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ abhängen. Verständlich wird dies durch das Verhalten der stationären Lösung im Grenzübergang $\lim_{\lambda_{||}/L \rightarrow 0}$ bzw. $\lim_{L \rightarrow \infty}$. Verschwindet die Fokussierung identisch, so ergibt sich im stationären Gleichgewicht keine Vorzugsrichtung der PWV. Der anisotrope Anteil muß somit identisch verschwinden, und nur der isotrope Anteil, d. h. der g_{0s} -Koeffizient, ist von null verschieden. Betrachtet man jedoch beispielsweise den M_{3s} -Koeffizienten für $\hat{\sigma} = 0$

$$M_{3s} = \frac{g_{3s}}{g_{1s}} = \frac{7\hat{q} - 1}{3\hat{q} - 6} \quad (5.19)$$

so nimmt dieser selbst für den Grenzübergang $\lim_{L \rightarrow \infty}$ einen endlichen Wert an. Ähnliches ist man vom Differentialquotienten gewohnt, der trotz eines infinitesimalen Dividenden und

	$\lambda_{ }/L$	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
g_{0s}	(-)	(-)	-
g_{1s}	+	(-)	-
g_{2s}	+	+	+
g_{3s}	+	+	-
g_{4s}	+	+	+
g_{5s}	+	+	-

Tabelle 5.1: Die Abhängigkeit der g_{ns} -Koeffizienten mit $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ von den Größen $\lambda_{||}/L$, \hat{q} und $\hat{\sigma}$ für ein Verhältnis $\lambda_{||}/L \lesssim 1$ ist durch folgende Symbole dargestellt: - geringe Abhängigkeit; + starke Abhängigkeit; () gilt bei Polarisation nur bedingt.

Divisors einen endlichen Wert annimmt. Die Betrachtung des Grenzfalls $L = \infty$, die BEECK AND WIBBERENZ [1986] vornehmen, ist daher für das stationäre Gleichgewicht von rein mathematischer Natur, da die Legendre-Koeffizienten g_{ns} mit $n \geq 1$ für diesen Fall identisch verschwinden und einer Messung nicht zugänglich sind. Sie wird von den Autoren dennoch vorgenommen, um den Einfluß der Fokussierung und der Polarisation getrennt betrachten zu können. Die Gleichungen (A.12)–(A.17) beinhalten hingegen beide Effekte, so daß es möglich ist, den zusätzlichen Effekt der Polarisation, d. h. für $\hat{\sigma} \neq 0$, bei vorhandener Fokussierung zu betrachten. Es zeigt sich dabei in Übereinstimmung mit BEECK AND WIBBERENZ [1986], daß die Polarisation besonders die geraden Legendre-Koeffizienten beeinflusst. Für die unsymmetrischen Legendre-Koeffizienten ergibt sich jedoch im Gegensatz zum Grenzfall $L = \infty$ eine schwache Abhängigkeit vom $\hat{\sigma}$ -Parameter. Desweiteren sind die geraden Legendre-Koeffizienten wegen des Faktors $(1 + \hat{\sigma}^2)$ nicht punktsymmetrisch bezüglich der $\hat{\sigma}$ -Werte.

Betrachtet man abschließend die Abhängigkeit vom \hat{q} -Parameter, so stellt man fest, daß diese bei allen Legendre-Koeffizienten g_{ns} mit $n \geq 2$ besteht. Anders ist es bei den g_{0s} - und g_{1s} -Koeffizienten, die bei identisch verschwindender Polarisation nur sehr gering bzw. gar nicht vom \hat{q} -Parameter abhängen.

In den Tabellen 5.1 und 5.2 sind noch einmal die Abhängigkeit sowohl der Legendre-Koeffizienten als auch der M_{ns} -Koeffizienten von den Parametern $\lambda_{||}/L$, \hat{q} und $\hat{\sigma}$ zusammengestellt. Wie man anhand der Tabelle 5.2 erkennt, ist es möglich, mit Hilfe der gemessenen M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ die Parameter $\lambda_{||}/L$, \hat{q} und $\hat{\sigma}$ zu bestimmen.

5.3.3 Der Zusammenhang zwischen dem “resonance gap” und den M_{ns} -Koeffizienten

Eine wichtige Frage im Zusammenhang mit der Rekonstruktion des PWSK aus den gemessenen PWVs betrifft die Genauigkeit, mit der das “resonance gap” rekonstruiert werden kann. Dabei geht es sowohl um die Breite des “resonance gap”, die bei PWSKs der Form (2.21) durch den \hat{q} -Parameter bestimmt wird, als auch um dessen Tiefe, die durch den H -Parameter festgelegt wird. Der $\hat{\sigma}$ -Parameter ist für die Betrachtung in diesem Abschnitt ohne Bedeutung und wird daher auf $\hat{\sigma} = 0$ festgelegt, d. h. es werden ausschließlich symmetrische PWSKs betrachtet.

	$\lambda_{ }/L$	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
M_{2s}	+	+	+
M_{3s}	(-)	+	-
M_{4s}	+	+	+
M_{5s}	(-)	+	-

Tabelle 5.2: Die Abhängigkeit der M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4, 5$ von den Größen $\lambda_{||}/L$, \hat{q} und $\hat{\sigma}$ für ein Verhältnis $\lambda_{||}/L \lesssim 1$ ist durch folgende Symbole dargestellt: - geringe Abhängigkeit; + starke Abhängigkeit; () gilt bei Polarisation nur bedingt.

Zunächst sei noch einmal auf den Wertebereich des H -Parameters hingewiesen, der für PWSKs mit $\hat{q} \geq 2$ den Wert $H = 0$ nicht beinhalten soll. Wie bereits in Abschnitt 2.1.2 erwähnt, ist für den Fall $\hat{q} \geq 2$ und $H = 0$ eine Streuung in den Halbraum $\mu \in [-1, 0)$ nicht möglich, da die Teilchen durch die Nullstelle des PWSK bei $\mu = 0$ nicht hindurchgestreut werden können. Andererseits kann für die \hat{q} -Werte mit $\hat{q} \in (1, 2)$ der Diffusionsstrom durch $\mu = 0$ nur auf einen minimalen Wert begrenzt werden, indem $H = 0$ gesetzt wird. Dabei gilt, daß der minimale Diffusionsstrom umso kleiner ist, je dichter sich der \hat{q} -Wert bei zwei befindet. Im Grenzübergang $\lim_{\hat{q} \rightarrow 2}$ verschwindet der Diffusionsstrom durch $\mu = 0$ schließlich identisch.

In Abbildung 5.8 sind die (\hat{q}, H) -Wertepaare aufgetragen, die zum selben M_{2s} -Koeffizienten (obere Hälfte) bzw. M_{3s} -Koeffizienten (untere Hälfte) führen. Dabei wird zwischen den M_{2s} - und den M_{3s} -Koeffizienten unterschieden, die sich für ein Verhältnis $\lambda_{||}/L = 0.1$ (durchgezogene Kurven) und $\lambda_{||}/L = 1$ (gestrichelte Kurven) ergeben. Die (\hat{q}, H) -Paare sind durch die in Anhang A angegebenen Lösungen der Gleichung (2.65) auf die Werte $\hat{q} = 1.6, 2, 3, 4$ beschränkt. Die durchgezogenen Kurven sind als lineare Interpolation zwischen den (\hat{q}, H) -Paaren aufzufassen. Betrachtet man den so festgelegten funktionalen Zusammenhang zwischen den Parametern \hat{q} und H , so zeigt sich, daß das breiter werdende “resonance gap”, d. h. der zunehmende \hat{q} -Parameter, zunächst mit einem zunehmenden H -Parameter verbunden ist. Verständlich wird dies, wenn man sich bewußt macht, daß der M_{2s} - und der M_{3s} -Koeffizient in entscheidender Weise durch den Diffusionswiderstand im Intervall um $\mu = 0$ geprägt werden. Dies bedeutet aber, daß der Diffusionswiderstand nur dann in etwa konstant bleibt, wenn bei breiter werdendem “resonance gap” die Tiefe des “resonance gap” geringer wird. Für große \hat{q} -Werte, wie z. B. $\hat{q} = 4$, scheint dieser Zusammenhang aber verloren zu gehen. Die M_{2s} - und M_{3s} -Koeffizienten sind dann nicht mehr ausschließlich von dem mit dem “resonance gap” verbundenen Diffusionswiderstand im Intervall um $\mu = 0$ abhängig, sondern auch von der Lage der Maxima des PWSK, die sich deutlich zu größeren $|\mu|$ -Werten verschieben.

Insgesamt ist die Abhängigkeit zwischen den \hat{q} - und H -Werten im Intervall $\hat{q} \in [2, 4]$ relativ gering, so daß sich für einen mittleren H -Wert von $H = 0.05$ ungefähr gleiche M_{2s} - und M_{3s} -Koeffizienten ergeben. Die Abbildung 5.8 rechtfertigt damit im nachhinein die Aussage, daß die in Abbildung 5.7 b), c) und d) dargestellten normierten Verteilungsfunktionen in etwa die gleichen M_{2s} - und M_{3s} -Koeffizienten haben.

Die Ähnlichkeit zwischen den Abhängigkeiten der \hat{q} - und H -Werte für den M_{2s} - und den M_{3s} -Koeffizienten zeigt aber auch, daß es kaum möglich ist, mit Hilfe dieser Koeffizienten die Parameter \hat{q} und H getrennt zu bestimmen. Um dies noch deutlicher zu machen, sind im

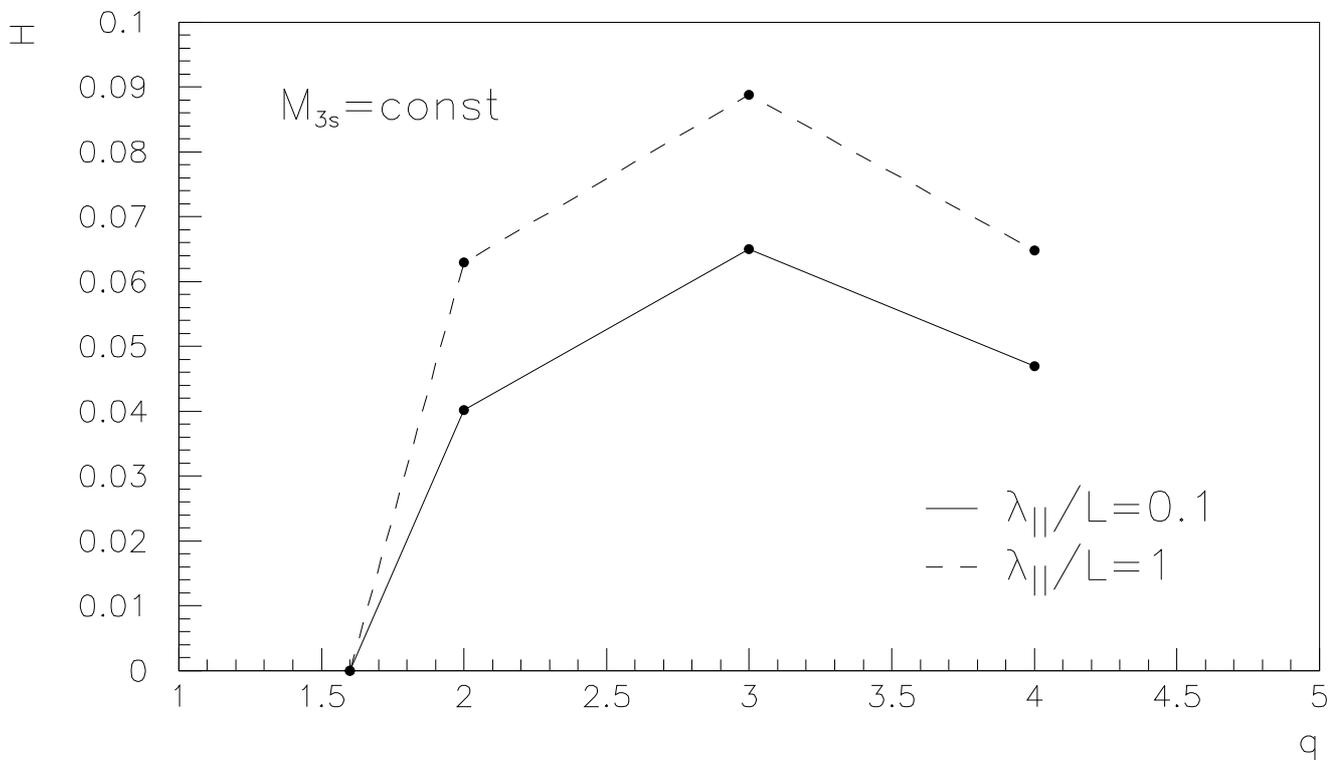
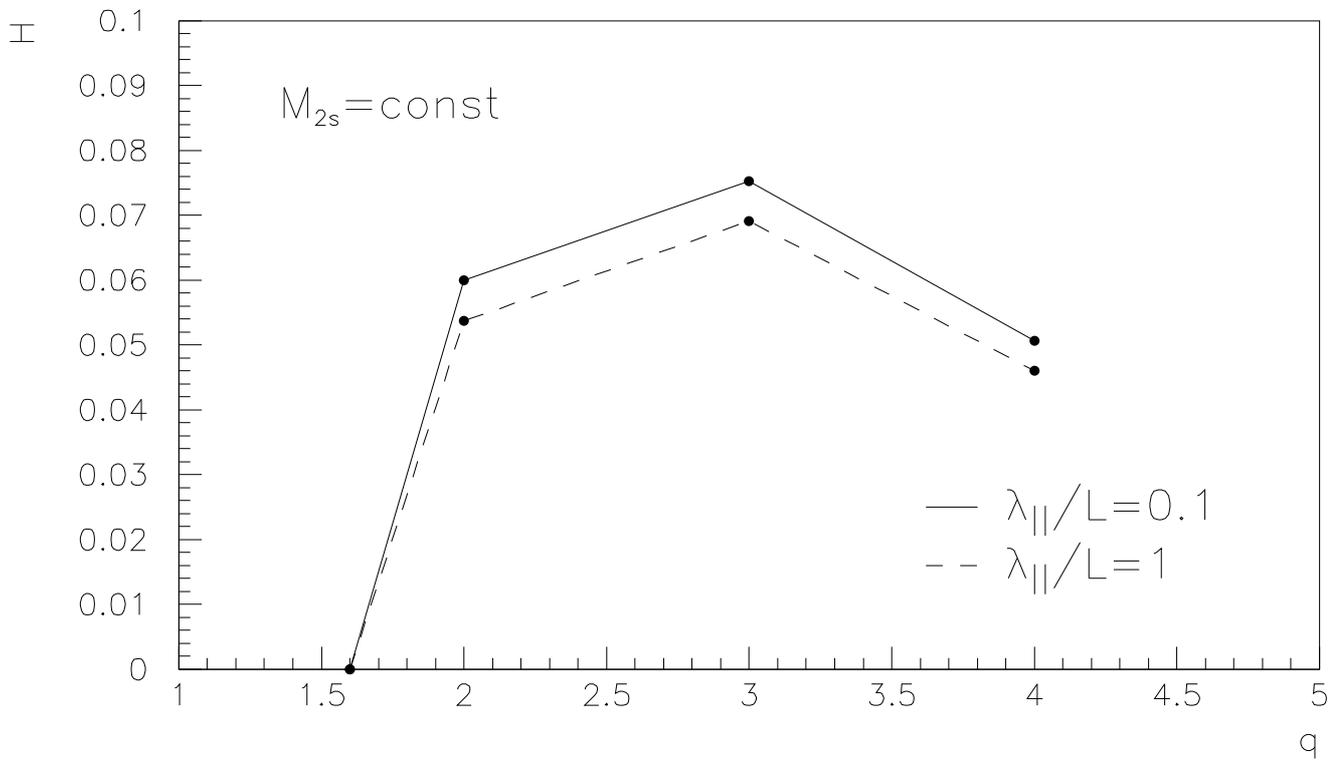


Abbildung 5.8: Die (\hat{q}, H) -Wertepaare sind für konstante M_{2s} -Koeffizienten (obere Hälfte) und M_{3s} -Koeffizienten (untere Hälfte) dargestellt. Dabei wird zwischen dem Verhältnis $\lambda_{||}/L = 0.1$ (durchgezogene Kurven) und dem Verhältnis $\lambda_{||}/L = 1$ (gestrichelte Kurven) unterschieden.

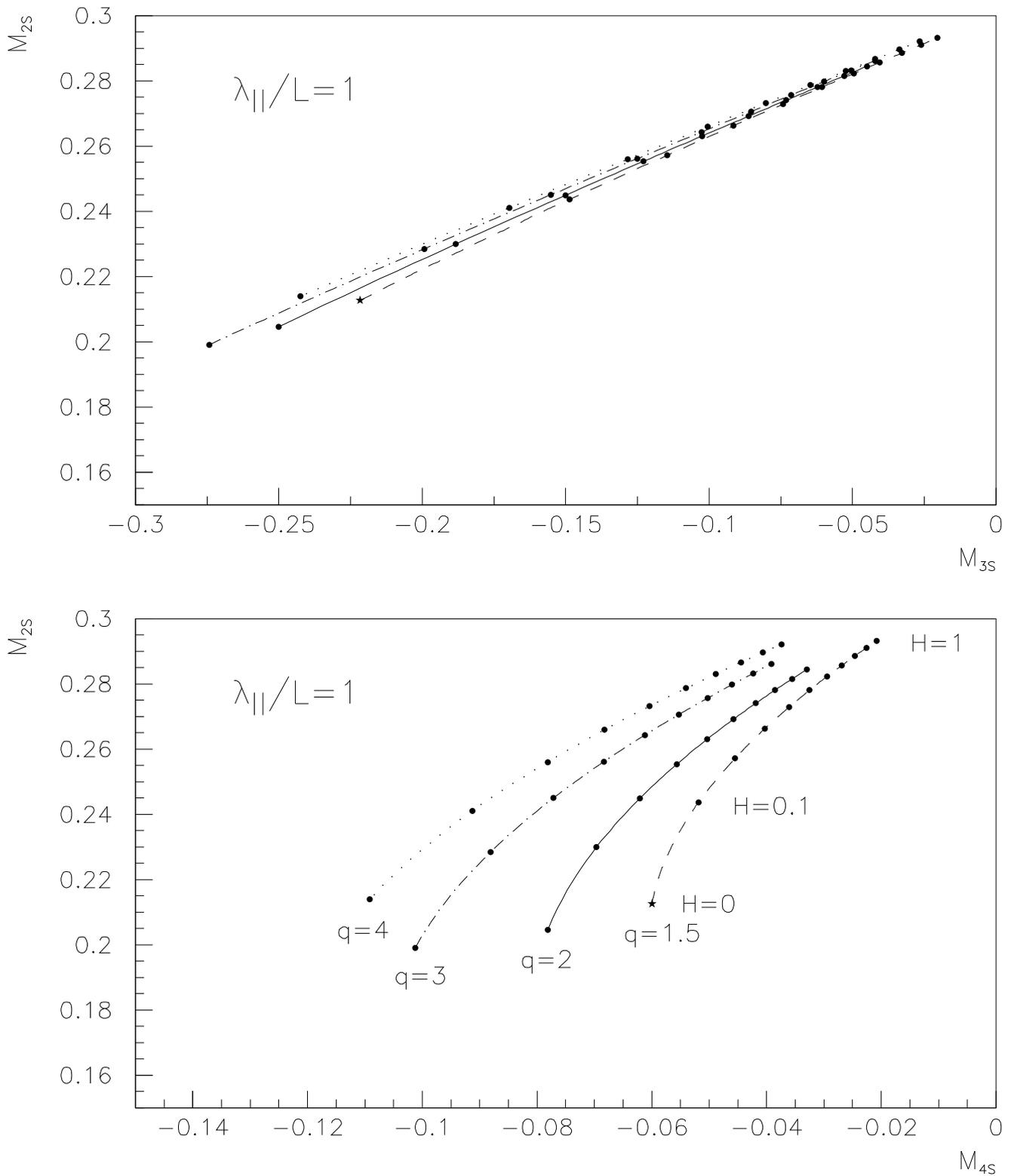


Abbildung 5.9: Der M_{2s} - und der M_{3s} -Koeffizient (oberer Teil) bzw. der M_{2s} - und der M_{4s} -Koeffizient (unterer Teil) sind für verschiedene \hat{q} - und H -Werte für das Verhältnis $\lambda_{||}/L = 1$ gegeneinander aufgetragen: $\hat{q} = 1.5$ (gestrichelte Kurven) mit $H \in [0, 1]$; $\hat{q} = 2$ (durchgezogene Kurven), $\hat{q} = 3$ (Kurven mit Strichen und Punkten) und $\hat{q} = 4$ (gepunktete Kurven) mit $H \in [0.1, 1]$ (von unten nach oben).

oberen Teil der Abbildung 5.9 beide Koeffizienten für verschiedene \hat{q} - und H -Werte gegeneinander aufgetragen. Das Verhältnis $\lambda_{||}/L = 1$ ist dabei konstant. Die sich so ergebenden vier Kurven haben die konstanten Werte $\hat{q} = 1.5$ (gestrichelte Kurve), $\hat{q} = 2$ (durchgezogene Kurve), $\hat{q} = 3$ (Kurve mit Strichen und Punkten) und $\hat{q} = 4$ (gepunktete Kurve). Der Wert $\hat{q} = 1.5$ wurde dem Wert $\hat{q} = 1.6$ vorgezogen, da es für $\hat{q} = 1.5$ möglich ist, die Legendre-Koeffizienten auch für $H \neq 0$ analytisch zu berechnen (siehe Anhang A). Physikalisch gesehen macht es kaum einen Unterschied, ob man den PWSK für $\hat{q} = 1.5$ oder für $\hat{q} = 1.6$ betrachtet. Entlang dieser vier Kurven ist der H -Parameter eine variable Größe. Beginnend mit dem ersten Punkt am unteren Ende der Kurven bis zum letzten Punkt am oberen Ende der Kurven wird der Wertebereich $H \in [0.1, 1]$ durchlaufen. Die Punkte folgen dabei jeweils in Abständen von 0.1. Eine Ausnahme bildet die gestrichelte Kurve für $\hat{q} = 1.5$, die mit einem Stern am unteren Ende abschließt. Der Wertebereich ist bei dieser Kurve bis zum Grenzwert $H = 0$ ausgedehnt worden.

Betrachtet man nun die relative Lage der vier Kurven zueinander, so zeigt sich, daß diese so dicht beieinanderliegen, daß eine Bestimmung der (\hat{q}, H) -Paare aus den M_{2s} - und M_{3s} -Koeffizienten kaum möglich ist; und zumal dann nicht, wenn die genannten Koeffizienten noch mit einem statistischen Fehler behaftet sind.

Anders sieht dies jedoch bei den M_{2s} - und M_{4s} -Koeffizienten aus, die entsprechend dem oberen Teil der Abbildung 5.9 im unteren Teil aufgetragen sind. Hier nehmen die Kurven für die unterschiedlichen \hat{q} -Werte speziell für kleine H -Werte deutlich unterschiedliche Verläufe an, so daß eine Bestimmung der (\hat{q}, H) -Paare möglich ist. Die gestrichelte Kurve zeigt zudem, wie die M_{2s} - und M_{4s} -Koeffizienten für $\hat{q} = 1.5$ beim Grenzübergang $\lim_{H \rightarrow 0}$ gegen das durch den Stern markierte Wertepaar konvergieren. Denkt man sich auch hier die genannten Koeffizienten mit statistischen Fehlern behaftet, so wird deutlich, daß die absolute Tiefe des "resonance gap", d. h. der H -Wert, nicht exakt bestimmt werden kann. Es ist lediglich möglich, eine obere Schranke für den H -Wert anzugeben. Der genaue Wert der oberen Schranke ist somit im wesentlichen von dem statistischen Fehler der M_{ns} -Koeffizienten abhängig und weniger von der Tatsache, daß die Meßmethode die Anzahl der bestimmbareren M_{ns} -Koeffizienten auf $n = 2, 3, 4$ begrenzt, wie es KRAHMANN [1991] behauptet. Dies liegt daran, daß die möglichen Funktionsverläufe des PWSK durch die Gleichung (2.21) bereits eingeschränkt worden sind. Es sind natürlich PWSKs denkbar, die zu sehr ähnlichen M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ führen, sich aber durch die Gleichung (2.21) nicht beschreiben lassen. Um diese im Detail abweichenden PWSKs dennoch erkennen zu können, ist es notwendig, die in den M_{ns} -Koeffizienten mit $n > 4$ noch zusätzlich vorhandene Information zur Auswertung heranzuziehen. Beschränkt man sich jedoch auf PWSKs der Form (2.21), dann können die (\hat{q}, H) -Paare bei geringem statistischen Fehler der M_{2s} - und M_{4s} -Koeffizienten gut voneinander unterschieden werden.

Zusammenfassend kann man sagen, daß aus den M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ bei einer identisch verschwindenden Polarisation, d. h. $\hat{\sigma} = 0$, die Parameter $\lambda_{||}/L$, \hat{q} und H bestimmt werden können. Für kleine Verhältnisse $\lambda_{||}/L < 1$ separiert sich die Bestimmung sogar noch, da allein aus dem M_{3s} -Koeffizienten der \hat{q} -Parameter bestimmt werden kann, so daß aus den M_{2s} - und M_{4s} -Koeffizienten nur noch das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ und der H -Parameter bestimmt werden müssen. Für große Verhältnisse $\lambda_{||}/L > 1$ müssen jedoch aus allen M_{ns} -Koeffizienten die Parameter $\lambda_{||}/L$, \hat{q} und H gleichzeitig bestimmt werden.

5.4 Die Näherung der zeitabhängigen Transportgleichung

In Abschnitt 5.3 wurde die diffusive Näherung als Näherung der stationären Transportgleichung verwendet. Der Näherungscharakter beschränkte sich damit bisher auf die Vernachlässigung eines einzigen Terms in der Transportgleichung (5.3). In diesem Abschnitt wird nun die diffusive Näherung als Näherung der zeitabhängigen Transportgleichung untersucht. Der Näherungscharakter der diffusiven Näherung ist in diesem Fall wesentlich weitgehender, da alle drei Terme auf der linken Seite der PDGl (5.3) vernachlässigt werden.

Aufbauend auf den Ergebnissen des Abschnitts 5.3 beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Näherung der zeitabhängigen Transportgleichung (5.3) durch die stationäre Transportgleichung (5.4). In anderen Worten: Es wird die Auswirkung der linken beiden Terme auf der linken Seite der PDGl (5.3) untersucht.

Von Interesse ist die diffusive Näherung und damit auch die Güte, mit der sie die zeitabhängige Transportgleichung approximiert, da sie von verschiedenen Autorengruppen zur Auswertung von zeitabhängigen gemessenen PWVs verwendet wird. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Autoren BEECK [1983], BEECK AND WIBBERENZ [1986], BEECK [1987], BEECK AND WIBBERENZ [1987], BEECK AND WIBBERENZ [1990], BIEBER AND POMERANTZ [1985], BIEBER, EVENSON, AND POMERANTZ [1986], die die normierte Verteilungsfunktion zur Auswertung verwenden, und um den Autor KRAHMANN [1991], der die lokale Kennfunktion verwendet. KRAHMANN [1991] stützt sich dabei auf die Vorarbeiten von GREEN AND SCHLÜTER [1985] und SCHLÜTER [1985]. Beide Zugänge führen zu äquivalenten Aussagen (siehe Abschnitt 5.2). Im folgenden wird der Näherungscharakter der diffusiven Näherung exemplarisch anhand der normierten Verteilungsfunktion untersucht.

Von den genannten Autoren wird, bis auf KRAHMANN [1991], immer wieder darauf hingewiesen, daß die normierte Verteilungsfunktion zeitlich nahezu konstant ist, und zwar nicht nur im diffusiven Grenzfall $\lambda_{||} \ll L$. Daß die normierte Verteilungsfunktion im diffusiven Grenzfall zeitunabhängig wird, ist unbestritten, da die aus der diffusiven Näherung hervorgehende PDGl (5.5) keine Zeitabhängigkeit mehr aufweist. Ohne die genaue Kenntnis der Lösungen der vollständigen Transportgleichung ist jedoch die Frage schwierig zu beantworten, inwieweit die normierte Verteilungsfunktion über den diffusiven Grenzfall hinaus nahezu zeitunabhängig bleibt. In diesem Zusammenhang werden von den genannten Autoren im wesentlichen zwei Argumente angeführt:

1. Empirische Betrachtungen der M_n -Koeffizienten von gemessenen solaren Ereignissen weisen nahezu Zeitunabhängigkeit auf (siehe z. B. GREEN [1992], S. 78f.; BIEBER, EVENSON, AND POMERANTZ [1986]).
2. Empirische Betrachtungen der Kennfunktion K von numerischen Lösungen der Transportgleichung weisen, abgesehen von der Einschwingphase, nahezu Zeitunabhängigkeit auf, falls die Injektion nicht impulsiv und die mittlere freie Weglänge nicht groß ist (siehe GREEN AND SCHLÜTER [1985], S. 8; SCHLÜTER [1985], S. 100f.).

Zum ersten Argument ist zu bemerken, daß die M_n -Koeffizienten im Vergleich zur omnidirektionalen Intensität, die während eines solaren Ereignisses um mehrere Größenordnungen variiert, nur schwach zeitabhängige Größen sind. Es handelt sich daher um eine relative Zeitunabhängigkeit, die insbesondere durch die Länge der Injektion und das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ beeinflusst wird, wie GREEN AND SCHLÜTER [1985] bzw. SCHLÜTER [1985] korrekt bemerken. Aber selbst für längere Injektionen und ein nicht allzu großes Verhältnis $\lambda_{||}/L$ wird die

normierte Verteilungsfunktion bzw. die lokale Kennfunktion nicht zeitunabhängig. Dies steht zunächst im Widerspruch zu der Aussage von GREEN AND SCHLÜTER [1985].

Bereits in Abschnitt 5.3.1 wurde darauf hingewiesen, daß man beim Vergleich von normierten Verteilungsfunktionen ein möglichst objektives Maß wählen sollte. Als objektiv haben sich dabei die Legendre-Koeffizienten bzw. die M_n -Koeffizienten erwiesen. GREEN AND SCHLÜTER [1985] vergleichen hingegen die zeitliche Abfolge der Kennfunktion $K(\mu)$ und nicht die der K_n -Koeffizienten der Kennfunktion (siehe Gleichung (5.17)). Für die K_n -Koeffizienten gilt aber in etwa das gleiche wie für die M_n -Koeffizienten, die für die geraden Koeffizienten mit kleiner werdendem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ immer kleiner werden. Die ungeraden Koeffizienten sind hingegen von dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ unabhängig. Dies führt für kleine Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ zu einer Dominanz der ungeraden über die geraden Koeffizienten, d. h. die normierte Verteilungsfunktion bzw. die lokale Kennfunktion werden immer punktsymmetrischer. Nun hat sich jedoch bei den numerischen Lösungen der zeitabhängigen Transportgleichung ergeben, daß speziell der M_3 -Koeffizient fast zeitunabhängig ist. Betrachtet man daher die normierte Verteilungsfunktion für kleine Verhältnisse $\lambda_{||}/L$, so wird diese durch den M_3 -Koeffizienten dominiert, der wiederum zeitlich nahezu unverändert bleibt. Dieser Umstand hat GREEN AND SCHLÜTER [1985] wahrscheinlich zu ihrer Aussage veranlaßt.

Aber bereits KRAHMANN [1991] erkennt, daß die lokalen Kennfunktionen $K(\mu)$, die nach der Einschwingphase dem Augenschein nach zeitunabhängig sind, einen schwachen Trend enthalten, der die Bestimmung des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ behindert. Genauere Untersuchungen von KRAHMANN [1991] haben jedoch ergeben, daß sich das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ unter der Bedingung, daß die Einschwingphase vor dem Maximum der omnidirektionalen Intensität beendet ist, aus der lokalen Kennfunktion zum Zeitpunkt des Intensitätsmaximums korrekt bestimmen läßt. Diese deutliche Aussage von KRAHMANN [1991] ist bemerkenswert, da er zum einen noch mit der älteren Version des GREF-Programms von SCHLÜTER [1985] gearbeitet hat und zum anderen die aus der PDGI (5.5) berechnete Kennfunktion, d. h. die vollständige diffusive Näherung verwendet. Der von ihm angegebene Zusammenhang ist rein empirischer Natur und wird in den Abbildungen 5.10 und 5.11 bestätigt.

In den Abbildungen 5.10 und 5.11 sind die omnidirektionale Intensität g_0 und die M_n -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ (durchgezogene Kurven) bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU über der Zeit aufgetragen. Besondere Bedeutung kommt dem Maximum in der omnidirektionalen Intensität zu, dessen Zeitpunkt durch eine vertikale gestrichelte Linie gekennzeichnet ist. Zusätzlich sind die M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ der Lösung der vollständigen stationären PDGI (5.4) als horizontale gestrichelte Linien eingezeichnet. Die Ausbreitungszeit der Teilchen beträgt 1.3 AU/h, das entspricht Protonen mit einer Energie von 16 MeV. Die Teilchen werden in der Nähe der Sonne mit einem Reid-Axford-Profil (vgl. Abbildung 3.5) mit den Parametern $t_A = 0.5$ h und $t_V = 2$ h injiziert. Die radiale mittlere freie Weglänge beträgt dabei in Abbildung 5.10 $\lambda_r = 0.1$ AU und in Abbildung 5.11 $\lambda_r = 0.4$ AU. Der PWSK wird als räumlich konstant angenommen mit den Parametern $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

Betrachtet man zunächst die Kurven der zeitabhängigen und der stationären Lösung der Abbildung 5.10, so zeigt sich deutlich, daß diese sich zum Zeitpunkt des Maximums schneiden. Die M_2 - und M_4 -Koeffizienten der zeitabhängigen Lösung weisen eine deutliche Zeitabhängigkeit auf und stimmen nur zum Zeitpunkt des Maximums mit den M_2 - und M_4 -Koeffizienten der stationären Lösung überein. Für den M_3 -Koeffizienten ergibt sich hingegen eine sehr geringe Zeitabhängigkeit, so daß der zeitabhängige und der stationäre M_3 -Koeffizient über einen großen Zeitbereich um das Maximum übereinstimmen.

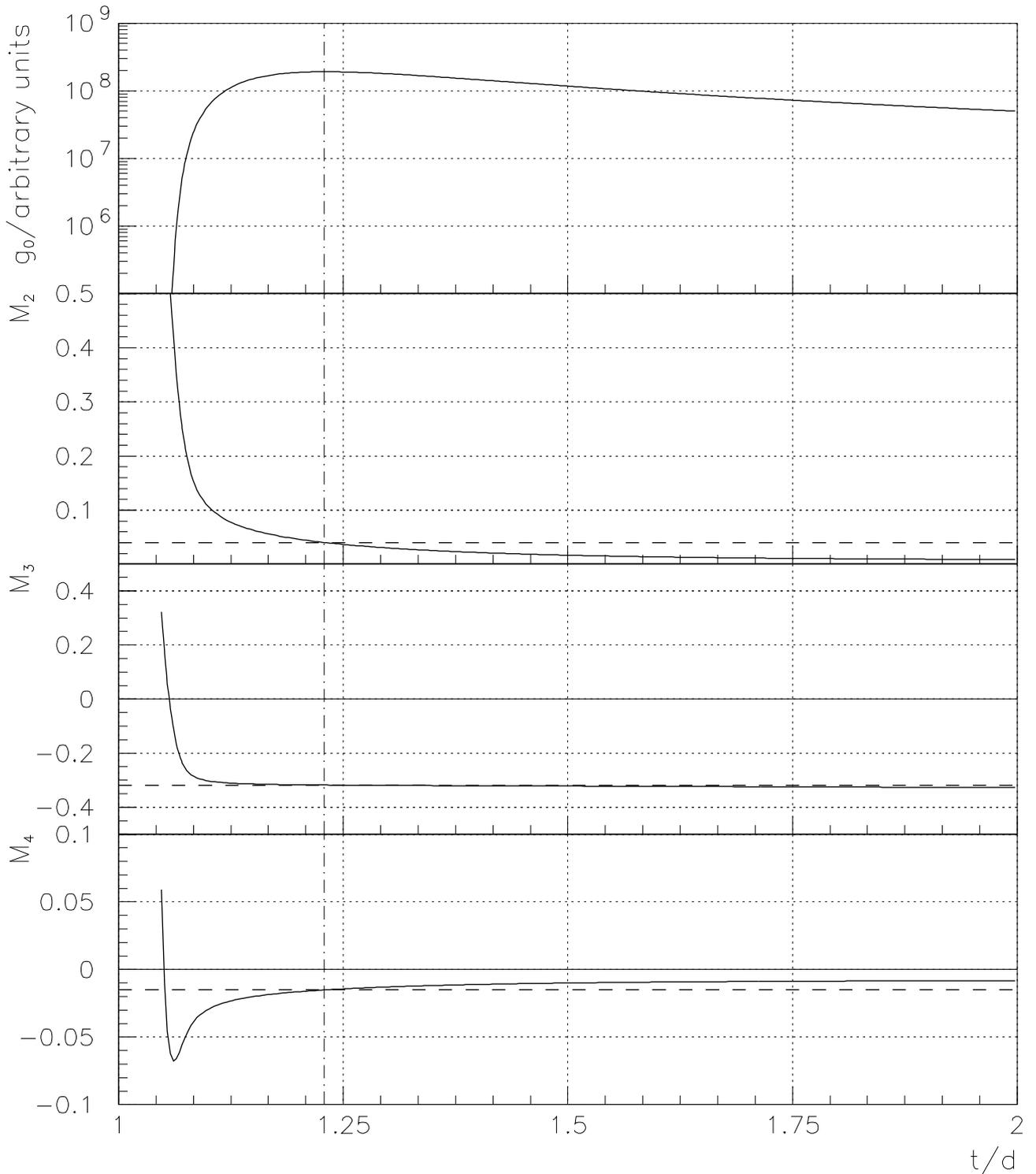


Abbildung 5.10: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die M_n -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ (durchgezogene Kurven) sind bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU über der Zeit aufgetragen. Zusätzlich sind die M_{ns} -Koeffizienten der Lösung der vollständigen stationären PDGI (5.4) (gestrichelte horizontale Linien) und der Zeitpunkt des Intensitätsmaximums (gestrichelte vertikale Linie) dargestellt. Die radiale mittlere freie Weglänge beträgt $\lambda_r = 0.1$ AU, das Reid-Axford-Injektionsprofil hat die Parameter $t_A = 0.5$ h und $t_V = 2$ h, der PWSK wird durch die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ bestimmt.

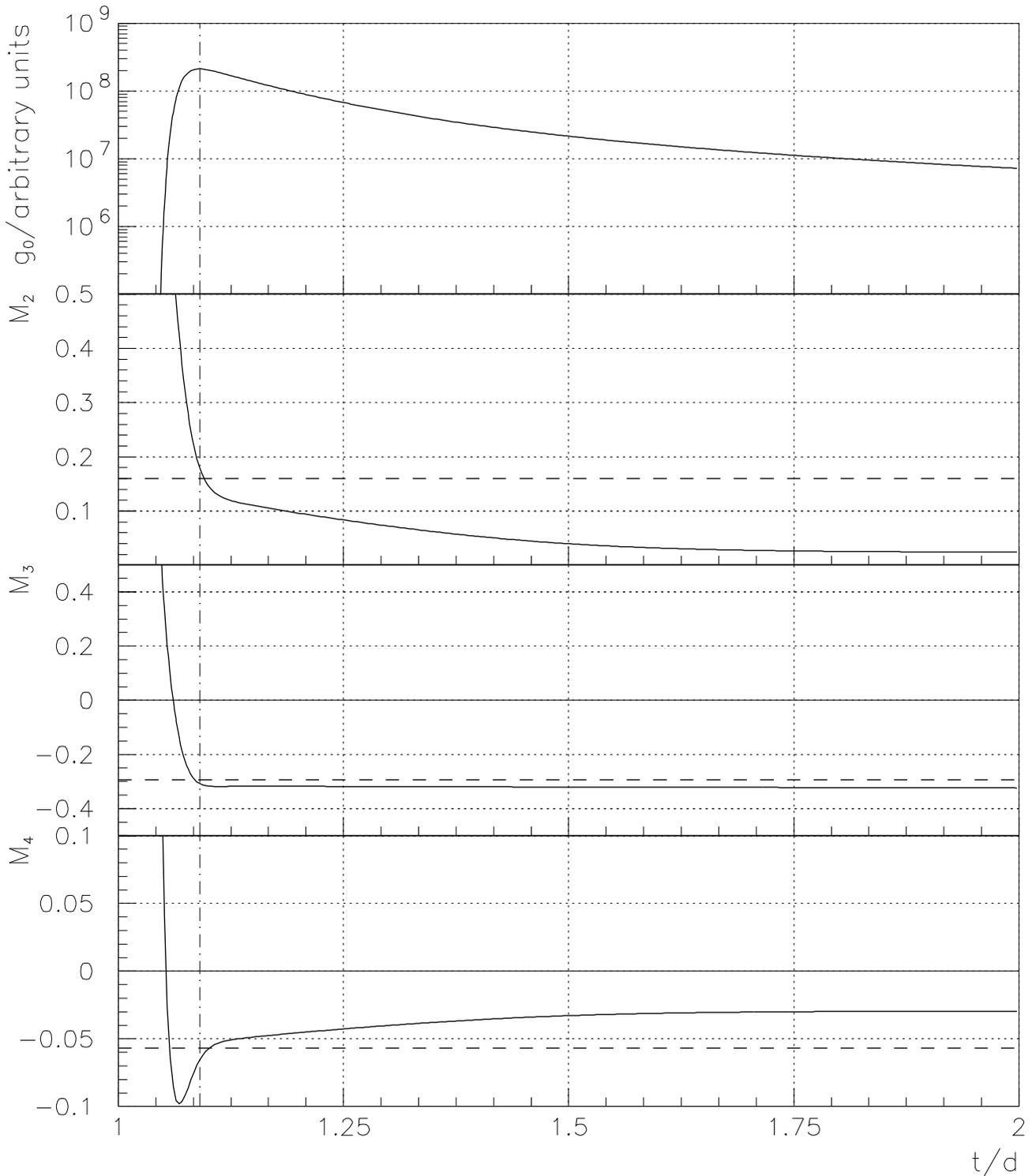


Abbildung 5.11: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die M_n -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ (durchgezogene Kurven) sind bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU über der Zeit aufgetragen. Zusätzlich sind die M_{ns} -Koeffizienten der Lösung der vollständigen stationären PDGI (5.4) (gestrichelte horizontale Linien) und der Zeitpunkt des Intensitätsmaximums (gestrichelte vertikale Linie) dargestellt. Die radiale mittlere freie Weglänge beträgt $\lambda_r = 0.4$ AU, das Reid-Axford-Injektionsprofil hat die Parameter $t_A = 0.5$ h und $t_V = 2$ h, der PWSK wird durch die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ bestimmt.

In Abbildung 5.11 hingegen ist die radiale mittlere freie Weglänge mit $\lambda_r = 0.4$ AU bereits so groß, daß sich das Maximum im g_0 -Koeffizienten noch im Einflußbereich der Einschwingphase befindet. Die zeitlichen Änderungen der Legendre-Koeffizienten g_n mit $n \geq 1$ sind dementsprechend größer, so daß die diffusive Näherung ungenauer wird. Die Schnittpunkte der durchgezogenen und der gestrichelten Kurven sind daher nicht zeitgleich mit dem Zeitpunkt des Maximums, befinden sich aber immer noch in dessen unmittelbarer Umgebung. Der M_3 -Koeffizient verhält sich auch in diesem Beispiel nahezu zeitunabhängig, hat aber einen von der stationären Lösung verschiedenen Wert.

Es stellt sich nun die Frage, weshalb dieser zunächst empirisch von KRAHMANN [1991] gefundene Zusammenhang zwischen den M_n -Koeffizienten der zeitabhängigen und der zeitunabhängigen Lösung zum Zeitpunkt des Maximums besteht. Die PDGls (5.3) und (5.4) unterscheiden sich nur durch die zeitlichen Ableitungen des isotropen und des anisotropen Anteils. Nun verschwindet im Maximum des isotropen Anteils ζ_0 bzw. des g_0 -Koeffizienten die entsprechende zeitliche Ableitung identisch:

$$\left. \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} \right|_{t=t_{\max}} = 0 \quad (5.20)$$

Die Näherung beschränkt sich daher zum Zeitpunkt des Maximums nur auf die zeitliche Ableitung des anisotropen Anteils ζ_1 , die nicht identisch verschwindet, wie man an den von null verschiedenen Steigungen der M_n -Koeffizienten zum Zeitpunkt des Maximums erkennen kann. Ist die Streuung im Verhältnis zur Fokussierung stark, so ist die zeitliche Ableitung des anisotropen Anteils klein. Für kleine mittlere freie Weglängen ist die stationäre PDGl (5.4) damit eine sehr gute Näherung der zeitabhängigen PDGl (5.3). Dies gilt aber nur für den anisotropen Anteil der Lösung.

Verständlich wird dies, wenn man sich bewußt macht, daß zum Zeitpunkt des Maximums quasistationäre Verhältnisse vorherrschen. Für die identisch verschwindende zeitliche Ableitung des isotropen Anteils ζ_0 zum Zeitpunkt des Maximums folgt aus der Kontinuitätsgleichung (2.61) eine räumlich konstante Stromdichte. Mathematisch gesehen handelt es sich hierbei nur um den Ort, an dem sich der Beobachter gerade befindet. Für starke Streuung und/oder eine langanhaltende Injektion sind die räumlichen Gradienten aber nicht allzu groß, so daß man auch noch in der Umgebung dieses Punktes von quasistationären Verhältnissen sprechen kann. Hat diese Umgebung der quasistationären Verhältnisse schließlich die Größe der lokalen Umgebung, auf der sich der anisotrope Anteil ζ_1 auf die lokalen Ausbreitungsbedingungen einstellt, so entspricht der anisotrope Anteil am Ort des Beobachters zum Zeitpunkt des Maximums dem anisotropen Anteil für stationäre Verhältnisse. Der isotrope Anteil ζ_0 stellt sich hingegen auf viel zu großen räumlichen Skalen ein, als daß in einer so großen Umgebung quasistationäre Verhältnisse vorherrschen könnten (es sei denn, die Streuung ist extrem groß).

Vergleicht man noch einmal die M_2 - und M_4 -Koeffizienten der zeitabhängigen Lösungen in Abbildung 5.10 und 5.11 zum Zeitpunkt des Intensitätsmaximums miteinander, so werden die unterschiedlichen Steigungen der M_n -Koeffizienten in Abhängigkeit von der mittleren freien Weglänge deutlich. In Abbildung 5.11, d. h. bei einer radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU, ist die Steigung sehr groß, und der Funktionsverlauf nimmt in der zeitlichen Umgebung des Intensitätsmaximums einen nichtlinearen Verlauf an. Mittelt man nun die M_2 - und M_4 -Koeffizienten über einen Zeitraum von beispielsweise zwei Stunden, was bei der typischen Zeitauflösung der Heliosdaten des E6-Experimentes von 15 Minuten nur acht

Datenpunkten entspricht, so entsprechen die gemittelten M_2 - und M_4 -Koeffizienten nicht den stationären M_2 - und M_4 -Koeffizienten. Eine Mittelung der Daten bietet sich aber aus verschiedenen Gründen an. So wird zum einen die Zählstatistik verbessert, und zum anderen ist es bei realen solaren Ereignissen äußerst schwierig, den genauen Zeitpunkt des Maximums zu bestimmen. Dieses Problem verschärft sich noch, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Teilchen zunimmt, da in diesem Fall das gesamte Zeitprofil des Ereignisses gestaucht wird. Wird dies nicht durch eine feinere Zeitauflösung der Meßdaten kompensiert, so wird es schwierig, den genauen zeitlichen Verlauf des g_0 -Koeffizienten und der M_n -Koeffizienten zu verfolgen. Eine höhere Zeitauflösung bedeutet aber wiederum eine schlechtere Zählstatistik, so daß es auch hier Beschränkungen durch den Meßaufbau gibt.

Zusammenfassend kann man daher sagen, daß es bereits bei einer radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.4$ AU bei einem radialen Abstand von $r = 1$ AU schwierig wird, die Ausbreitungsbedingungen aus den M_n -Koeffizienten zum Zeitpunkt des Intensitätsmaximums zu ermitteln. Dabei ist zu bedenken, daß der Zusammenhang zwischen den M_{ns} -Koeffizienten der stationären Lösung und den M_n -Koeffizienten der zeitabhängigen Lösung zum Zeitpunkt des Intensitätsmaximums erst von KRAHMANN [1991] in dieser Deutlichkeit erkannt und von HATZKY AND WIBBERENZ [1995] bestätigt worden ist. Dementsprechend ergeben sich bei den Auswertungen von BEECK [1983], BEECK AND WIBBERENZ [1986], BEECK [1987], BEECK AND WIBBERENZ [1987], BEECK AND WIBBERENZ [1990] und BIEBER, EVENSON, AND POMERANTZ [1986] Ungenauigkeiten bei der Auswertung. Wie groß diese Ungenauigkeiten im einzelnen sind, ist natürlich von der mittleren freien Weglänge und der Zeitdauer der Injektion abhängig. So ist z. B. im Fall der Untersuchung der Langzeitvariation von Teilchen mit einer Steifigkeit von 10 GeV, wie sie von BIEBER AND POMERANTZ [1985] vorgenommen wird, die Annahme von stationären Verhältnissen durchaus gerechtfertigt. Das gleiche gilt für die von BEECK AND WIBBERENZ [1986] untersuchten Elektronen eines solaren Ereignisses mit dem kleinen Verhältnis $\lambda_{||}/L = 0.09$ (siehe auch Abschnitt 5.3).

Zieht man noch die bereits in Abschnitt 5.3 gewonnenen Erkenntnisse über den Näherungscharakter der diffusiven Näherung hinzu, so ist abschließend zu bemerken, daß die diffusive Näherung nur bei (sehr) kleinem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ oder bei einer langandauernden Injektion und großem radialen Abstand **zum Zeitpunkt des Maximums** der omnidirektionalen Intensität zu verwenden ist. Sind diese Bedingungen nicht gegeben, so stellt die diffusive Näherung eine grobe Näherung dar, die zu von der Realität stark abweichenden Ergebnissen führen kann.

Kapitel 6

Die Auswertung der Meßdaten

In diesem Kapitel wird zunächst ein Auswertungsverfahren vorgestellt, das es ermöglicht, mit Hilfe der numerisch berechneten Lösungen der vollständigen stationären Transportgleichung die Ausbreitungsparameter für die in Anhang E aufgelisteten solaren Ereignisse zu bestimmen. Eine Näherung der Lösungen der Transportgleichung, wie z. B. die im vorhergehenden Kapitel diskutierte diffusive Näherung, wird dabei nicht vorgenommen. Anschließend werden die so bestimmten Ausbreitungsparameter mit bereits publizierten Ergebnissen verglichen und hinsichtlich ihrer Bedeutung diskutiert.

6.1 Bestimmung von Zeitreihen der Ausbreitungsparameter

Aus den Abschnitten 5.3 und 5.4, in denen die diffusive Näherung der Transportgleichung besprochen worden ist, folgt, daß es nicht möglich ist, ein Auswertungsverfahren anzugeben, welches Zeitreihen der Ausbreitungsparameter $\lambda_{||}/L$, \hat{q} , H und $\hat{\sigma}$ für beliebige Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ liefert. Dennoch ist es unter sehr einschränkenden Bedingungen zumindest möglich, aus dem M_3 -Koeffizienten eine Zeitreihe des Diffusionswiderstandes (siehe Gleichung (3.53)) in der Umgebung von $\mu = 0$ zu gewinnen. Als Maß für den Diffusionswiderstand, der durch die Breite und die Tiefe des “resonance gap” bestimmt wird, wird dabei der \hat{q} -Parameter des Standardmodells verwendet, der, wie in Abschnitt 5.3.3 gezeigt wurde, in engem Zusammenhang mit dem H -Parameter steht. Es geht somit um den Teilchenstrom, der sich durch das “resonance gap” hindurch einstellt.

Die einschränkenden Bedingungen ergeben sich zum einen durch den Gültigkeitsbereich der Näherung der Lösung der genäherten PDGl (5.5), wie in Abbildung 5.6 zu erkennen ist. Beschränkt man sich auf kleine Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ und große radiale Abstände, dann ist es möglich, den stationären M_{3s} -Koeffizienten durch

$$M_{3s} = \frac{g_{3s}}{g_{1s}} = \frac{7\hat{q} - 1}{3\hat{q} - 6} \quad (6.1)$$

zu beschreiben. Selbst eine geringe Polarisation des Magnetfeldes, d. h. $\hat{\sigma} \neq 0$, würde an der Gültigkeit dieser Näherung nichts ändern, wie aus den Gleichungen (A.13) und (A.15) im Anhang A hervorgeht.

Zum anderen muß man der Tatsache Rechnung tragen, daß die M_n -Koeffizienten nicht zeitlich konstant sind, so daß im allgemeinen die M_n -Koeffizienten zu beliebigen Zeiten t nicht

mit den stationären M_{ns} -Koeffizienten übereinstimmen:

$$M_n(t) \neq M_{ns} \quad (6.2)$$

Lediglich der M_3 -Koeffizient zeigt bei kleinem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ über einen großen Zeitbereich ein nahezu zeitunabhängiges Verhalten, wie in der Abbildung 5.10 zu erkennen ist. Für das Standardmodell läßt sich somit für große radiale Abstände und kleine Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ mit Hilfe der Gleichung (6.1) im Zeitbereich nach der Einschwingphase folgender Zusammenhang herstellen:

$$\hat{q}(t) = \frac{6M_3 - \frac{7}{3}}{M_3 - \frac{7}{3}} \quad (6.3)$$

Betrachtet man die im Anhang E aufgeführten solaren Ereignisse, so stellt man fest, daß nur sehr wenige Ereignisse den oben genannten Auswahlkriterien genügen: Ist das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ groß, so sind die PWVs gebündelt, und es lassen sich die M_n -Koeffizienten über einen großen Zeitbereich mit einem geringen statistischen Fehler berechnen. Ein großes Verhältnis $\lambda_{||}/L$ verletzt aber die Auswahlkriterien. Ist das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ hingegen klein und somit konform mit den Auswahlkriterien, so sind die PWVs nicht gebündelt genug, um den statistischen Fehler klein genug zu halten. Lediglich für den E03-Kanal des solaren Ereignisses vom 27. Juli (doy¹ 208) 1975 auf HELIOS 1 ergibt sich eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.125$ AU (siehe Anhang E). Der radiale Abstand beträgt $r = 0.86$ AU; außerdem ist eine ausreichende Statistik vorhanden, um eine Zeitreihe des \hat{q} -Parameters berechnen zu können.

In Abbildung 6.1 sind analog zu den Abbildungen 5.10 und 5.11 die omnidirektionale Intensität g_0 und die M_n -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ (durchgezogene Kurven) über der Zeit aufgetragen. Die gestrichelten horizontalen Linien geben die M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ an, die sich aus der Anwendung des steady-state-Theorems aus Abschnitt 2.2.3 ergeben. Deutlich ist zu erkennen, wie der statistische Fehler zu Beginn des Ereignisses geringer wird, um dann im Verlauf der Zeit allmählich wieder anzusteigen. Es zeigt sich dabei, daß der statistische Fehler mit steigender Ordnung der M_n -Koeffizienten ebenfalls ansteigt. Dies ist durch die mittellenden Effekte der Sektoren und des Öffnungswinkels des Detektorteleskops bedingt, die sich um so stärker bemerkbar machen, je feiner die pitchwinkelabhängigen Strukturen der PWV aufgelöst werden. Am stärksten machen sie sich beim hier gezeigten M_4 -Koeffizienten bemerkbar, der die feinsten Strukturen der PWV auflöst.

Zusätzlich ergibt sich für den M_4 -Koeffizienten das Problem, daß der g_4 -Koeffizient, zu dem der M_4 -Koeffizient proportional ist, nur indirekt aus den acht Sektormesswerten ermittelt werden kann. Nur unter der Annahme, daß die Umlaufwinkelverteilung $I(\alpha)$ in der Sektorebene hinreichend symmetrisch ist und nicht in der unmittelbaren Umgebung einer Sektorgrenze liegt, kann der g_4 -Koeffizient aus den acht Sektormittelwerten rekonstruiert werden (siehe GREEN [1992], S. 17f.; HATZKY [1993], S. 39ff.). Für die Darstellung des M_4 -Koeffizienten werden daher zwei Symbole gewählt: Kreise für eine vollständige Rekonstruktion fern einer Sektorgrenze, Sterne für eine unvollständige Rekonstruktion in der Nähe einer Sektorgrenze. Wie das Verhältnis zwischen Kreisen und Sternen für ein bestimmtes solares Ereignis ist, hängt stark von der Lage der Magnetfeldrichtung \hat{e}_B zu den Sektorgrenzen ab. Liegt z. B. die Magnetfeldrichtung auf einer Sektorgrenze der Sektorebene und verändert sie ihre Lage

¹doy = day of year

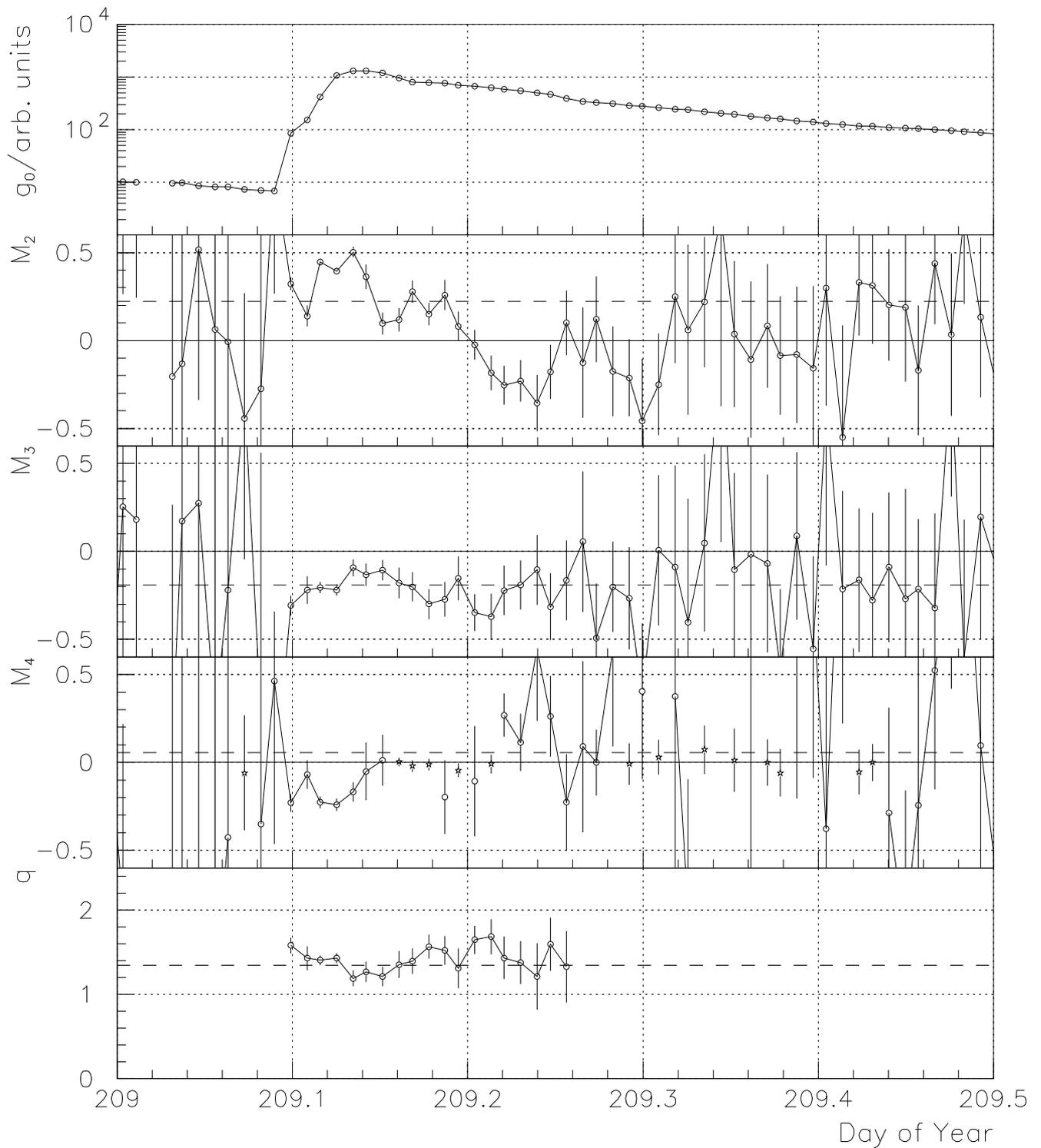


Abbildung 6.1: Die omnidirektionale Intensität g_0 und die M_n -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ (durchgezogene Kurven) des E03-Kanals vom 28. Juli (doy 209) 1975 auf HELIOS 1 sind bei einem radialen Abstand von $r = 0.86$ AU über der Zeit aufgetragen. Die mit Hilfe des steady-state-Theorems berechneten M_{ns} -Koeffizienten sind als gestrichelte horizontale Linien eingezeichnet. Zusätzlich ist im unteren Teil der Abbildung der aus Gleichung (6.3) berechnete \hat{q} -Parameter dargestellt.

während des Ereignisses nur geringfügig, so ist der g_4 -Koeffizient während großer Zeitbereiche nicht zu bestimmen.

Zu diesen durch den Meßprozeß hervorgerufenen Problemen bei der Rekonstruktion des g_4 -Koeffizienten kommt noch die Tatsache, daß der g_4 -Koeffizient nach der Transportgleichung (2.58) für typische Ausbreitungsbedingungen relativ zu den anderen Legendre-Koeffizienten nur einen sehr kleinen Betrag aufweist, wie man z. B. anhand der Gleichungen (A.12)–(A.16) im Anhang A überprüfen kann. Aus diesen Gründen wird im weiteren Verlauf der Arbeit von einer Auswertung des g_4 -Koeffizienten bzw. der direkt damit verbundenen Größen, dem M_4 -Koeffizienten und der Anisotropie vierter Ordnung ξ_4 , abgesehen. Nach Abschnitt 5.3.3 bedeutet dies jedoch, daß die Breite des “resonance gap” nicht bestimmt werden kann.

Vergleicht man qualitativ den zeitabhängigen Verlauf der M_2 - und M_3 -Koeffizienten in dem Bereich, in dem die statistischen Fehler gering sind, mit der numerischen Lösung der zeitabhängigen Transportgleichung in Abbildung 5.10, so wird deutlich, daß die gemessenen M_2 - und M_3 -Koeffizienten zeitlichen Schwankungen unterliegen. Diese zeitlichen Schwankungen sind deutlich größer als der statistische Meßfehler und müssen daher ihre Ursache in den sich am Meßort mit der Zeit ändernden PWVs haben.

Wie bereits in Abschnitt 2.1.1 erwähnt, breiten sich die energiereichen Teilchen entlang des interplanetaren Magnetfeldes aus, das die Form einer korotierenden Archimedischen Spirale hat. Diese korotierende Bewegung wird aber von dem Raumfahrzeug — sieht man von seiner Eigenbewegung ab — nicht mitvollzogen, so daß das Raumfahrzeug nicht auf derselben Magnetfeldlinie fixiert bleibt, entlang welcher sich die Teilchen in idealisierter Weise in Form einer Flußröhre ausbreiten. Das Meßinstrument tastet somit im Laufe der Zeit die PWVs von unterschiedlichen Flußröhren ab. Dabei können die Ausbreitungsbedingungen entlang einer bestimmten Flußröhre zeitlich konstant sein, so daß die Annahme eines zeitlich konstanten Fokussierungs- und Streuterms in der Transportgleichung (2.58) gerechtfertigt bleibt. Man könnte in diesem Fall von einer “*Streifigkeit*” des Magnetfeldes sprechen, da die Ausbreitungsbedingungen innerhalb einer Flußröhre konstant sind, sich aber von Flußröhre zu Flußröhre ändern.

Neben der Geschwindigkeit der Korotation v_φ ist noch die radiale Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{\text{sw}} = 400$ km/s zu berücksichtigen, mit welcher die nach dem magnetostatischen Bild im interplanetaren Plasma eingefrorenen Magnetfeldfluktuationen über den Beobachter hinweggetragen werden. Das Verhältnis dieser beiden Geschwindigkeiten beträgt nach Gleichung (2.9):

$$\frac{v_\varphi}{v_{\text{sw}}} = \beta r = -1.073 \text{ AU}^{-1} \cdot r$$

und ist damit vom Radius r abhängig.² Die Tatsache, daß sich der Beobachtungsort gegenüber den Magnetfeldfluktuationen auch in radialer Richtung ändert, dürfte jedoch auf die gemessenen PWVs keinen großen Einfluß haben, da sich diese auf die Ausbreitungsbedingungen in der lokalen Umgebung einstellen (siehe Abschnitt 5.2). Durch die Mittelung der Teilchen über die Ausbreitungsbedingungen in der lokalen Umgebung innerhalb einer Flußröhre kann somit nicht direkt von den PWVs auf die Ausbreitungsbedingungen am Meßort geschlossen werden. Ob die räumliche Struktur des Magnetfeldes der eines “Schachbretts” ähnelt, kann

²Für einen radialen Abstand von $r = 1$ AU sind damit beide Geschwindigkeitskomponenten in etwa gleich; für das Perihel der HELIOS-Satelliten von $r = 0.3$ AU ist die Sonnenwindgeschwindigkeit um den Faktor ≈ 3 größer als die Geschwindigkeit der Korotation.

nicht direkt überprüft werden, da die lokale Umgebung mit ≈ 0.1 AU, verglichen mit der Strecke von ≈ 0.01 AU, die der Beobachter relativ zu den Magnetfeldfluktuationen innerhalb von einer Stunde zurücklegt, relativ groß ist. Betrachtet man den M_2 - und M_3 -Koeffizienten, so stellt man fest, daß dieser aber schon innerhalb der Zeitauflösung von 15 Minuten deutliche Veränderungen aufweist.

Die zeitlichen Änderungen der M_2 - und M_3 -Koeffizienten sind somit zusätzlich zu den sich aus den numerischen Lösungen der Transportgleichung langfristig ergebenden zeitlichen Trends von kurzfristigen zeitlichen Änderungen überlagert, die nicht durch den statistischen Fehler begründet werden können. Diese kurzfristigen zeitlichen Änderungen sind höchstwahrscheinlich dadurch bedingt, daß der Beobachter im Laufe der Zeit die PWVs unterschiedlicher Flußröhren mißt, in denen unterschiedliche Ausbreitungsbedingungen vorherrschen und stellen somit einen Beleg für die "Streifigkeit" des Magnetfeldes dar. Leider läßt das Zeitverhalten des M_2 -Koeffizienten keine Rekonstruktion der Ausbreitungsbedingungen zu. Nimmt man jedoch an, daß trotz der unterschiedlichen Ausbreitungsbedingungen in den benachbarten Flußröhren das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ klein bleibt, so kann mit Hilfe der Gleichung (6.3) eine Zeitreihe des \hat{q} -Parameters berechnet werden, die im unteren Teil der Abbildung 6.1 dargestellt ist. Dabei zeigt sich, daß die so bestimmten \hat{q} -Werte im Mittel um den \hat{q} -Wert schwanken, der sich aus dem nach dem steady-state-Theorem berechneten M_{3s} -Koeffizienten ergibt. Bei großer Unsicherheit des \hat{q} -Parameters wurde von einer Berechnung abgesehen. Die aus den M_{2s} - und M_{3s} -Koeffizienten bzw. den stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ bestimmten Ausbreitungsparameter sind somit als über das jeweilige Ereignis gemittelte Größen aufzufassen.

Die eigentlichen Größen, über die integriert wird, sind jedoch nach dem steady-state-Theorem die Legendre-Koeffizienten. Dies bedeutet aber, daß die Mittelung gewichtet mit dem Betrag der Legendre-Koeffizienten erfolgt und die Zeitbereiche um die Maxima der Legendre-Koeffizienten im wesentlichen zum über die Zeit aufintegrierten Legendre-Koeffizienten g_{ns} beitragen. Als Folge davon stimmt der M_{2s} -Koeffizient in Abbildung 6.1 eher mit den M_2 -Werten zu Anfang des Ereignisses überein, da diese geringe Fehlerbalken aufweisen und somit auf Legendre-Koeffizienten schließen lassen, die vom Betrag her groß sind. Die Anwendung des steady-state-Theorems, das strenggenommen nur für die zeitliche Abfolge der Legendre-Koeffizienten einer bestimmten Flußröhre gilt, kann unter der Annahme, daß sich die Ausbreitungsbedingungen in dem Zeitbereich um die Maxima der Legendre-Koeffizienten nicht allzu stark ändern, weiterhin gerechtfertigt werden.

Neben der Tatsache, daß die \hat{q} -Werte um einen Mittelwert schwanken, wäre es natürlich von Interesse, die einzelnen \hat{q} -Werte mit den gleichzeitig gemessenen Magnetfeldspektren zu vergleichen. Leider erlaubt es die geringe Zeitauflösung der Magnetfelddaten in dem entsprechenden Zeitbereich nicht, aussagekräftige Magnetfeldspektren zu bestimmen. Das Magnetfeld kann lediglich dazu verwendet werden auszuschließen, daß es sich bei der zeitlichen Abfolge von \hat{q} -Werten um einen Effekt handelt, der auf starke Richtungsänderungen des Magnetfeldes zurückzuführen ist, die eine korrekte Rekonstruktion der PWVs aus den Sektermittelwerten verhindern würden.

6.2 Die Bestimmung der globalen mittleren freien Weglänge

Im vorhergehenden Abschnitt sind noch einmal die restriktiven Bedingungen deutlich geworden, die die Verwendung der diffusiven Näherung zur Bestimmung der Ausbreitungsbedingungen erschweren. In der Praxis zeigt sich, daß nur sehr wenige solare Ereignisse des Datensatzes des E6-Experiments auf den HELIOS-Satelliten die Voraussetzungen erfüllen, um mit einer Methode ausgewertet zu werden, die auf der diffusiven Näherung beruht. Davon abgesehen ist eine Bestimmung der globalen mittleren freien Weglänge ohnehin nicht mit der diffusiven Näherung zu bewerkstelligen, wie in Abschnitt 5.2.2 bereits gezeigt wurde. In diesem Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, die radiale mittlere freie Weglänge λ_r mit Hilfe von numerischen Lösungen der vollständigen stationären Transportgleichung zu bestimmen.

6.2.1 Die herkömmliche Methode des Fittens

Mißt man Zeitprofile der omnidirektionalen Intensität g_0 und der Anisotropie erster Ordnung $\xi_1 = g_1/g_0$ eines solaren Ereignisses an einem bestimmten Ort, so können diese dazu genutzt werden, die radiale mittlere freie Weglänge λ_r und die Dauer der Injektion zu bestimmen (siehe SCHULZE, RICHTER, AND WIBBERENZ [1977]). Dies soll im folgenden verständlich gemacht werden.

Die omnidirektionale Intensität g_0 und der g_1 -Koeffizient sind in ihrem zeitlichen Verlauf beide von dem Injektionsprofil abhängig (vgl. SCHLÜTER [1985], S. 20). Dabei kommt es außerdem darauf an, wie die Streuung räumlich verteilt ist. Liegen z. B. Bereiche mit starker Streuung zwischen der Quelle und dem Beobachter, so wirken diese wie Zwischenspeicher, die die Teilchen über einen längeren Zeitraum allmählich wieder abgeben. Eine ursprünglich δ -förmige Injektionsfunktion wird dabei stark aufgeweitet. Die Zeitprofile sowohl des g_0 - als auch des g_1 -Koeffizienten sind somit globale Größen, die vom räumlichen Verlauf der Streuung $\lambda_{||}(s)$ bzw. $\lambda_r(r)$ abhängig sind. Die Abhängigkeit von der Form des PWSK ist hingegen nur schwach, wie man schon aus den stationären Legendre-Koeffizienten g_{0s} und g_{1s} anhand der Tabelle 5.1 in Abschnitt 5.3.2 schließen kann.³ Die in Tabelle 5.1 aufgeführten Abhängigkeiten von den Ausbreitungsparametern gelten strenggenommen nur für kleine Verhältnisse $\lambda_{||}/L < 1$, behalten aber auch für größere Verhältnisse $\lambda_{||}/L \sim 1$ qualitativ ihre Gültigkeit, wie eigene numerische Berechnungen gezeigt haben.

In den g_0 - und g_1 -Koeffizienten steckt somit Information über die Injektionsfunktion und den räumlichen Verlauf des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$, das sich für den Fall, daß man eine durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes bestimmte Fokussierungslänge annimmt, auf den räumlichen Verlauf von $\lambda_{||}$ reduziert. Es bleibt noch zu klären, inwieweit die Einflüsse der Injektionsfunktion und des räumlichen Verlaufes der Streuung auf die gemessenen g_0 - und g_1 -Koeffizienten an einem Ort voneinander separiert werden können. Benutzt man die weit verbreitete Methode des Anpassens (*Fitten*) der numerischen Lösung an die Zeitprofile der omnidirektionalen Intensität g_0 und der Anisotropie ξ_1 , so stellt man fest, daß die Injektionsfunktion und die radiale Abhängigkeit der Streuung nicht eindeutig voneinander

³Die Anforderungen an ein numerisches Differenzenschema zur Lösung der Transportgleichung sind weniger hoch, wenn man nur die g_0 - und g_1 -Koeffizienten betrachtet, da es sich hierbei um relativ grobe Größen der PWVs handelt, die von den Details der PWVs, welche von der Form des PWSK geprägt werden (siehe Abschnitt 5.3.1), kaum beeinflusst werden.

zu trennen sind. Dies ist selbst dann nicht möglich, wenn man sich auf ein einfaches Injektionsprofil, wie z. B. das Reid-Axford-Profil (siehe Gleichung (3.91)) und eine funktionale Abhängigkeit der radialen mittleren freien Weglänge λ_r in Form eines Potenzgesetzes (siehe Gleichung (2.26))

$$\lambda_r(r) \propto \left(\frac{r}{r_0}\right)^b$$

beschränkt. Man kann lediglich gewisse Kombinationen von Injektionsfunktion und radialen Abhängigkeiten der mittleren freien Weglänge λ_r als nicht konsistent mit den gemessenen Zeitprofilen ausschließen. Gelingt es jedoch, aus anderer Quelle Information über die Injektionsfunktion oder die radiale Abhängigkeit der mittleren freien Weglänge λ_r zu gewinnen, dann sollte es möglich sein, die verbleibenden Parameter aus dem Fit zu bestimmen.

In der Literatur gibt es verschiedene Angaben für den Exponenten b des Potenzgesetzes der radialen mittleren freien Weglänge. BEECK [1987] bzw. BEECK ET AL. [1987] untersuchen zwei solare Ereignisse, die auf unterschiedlichen Raumfahrzeugen (HELIOS 1 und 2, ISEE 1 und Voyager 1) in einem radialen Bereich von $r = 0.7$ bis 1.9 AU gemessen wurden. Für das Ereignis vom 22. November 1977 erhalten sie den Wert $b = 0.7$ und für das Ereignis vom 27. Dezember 1977 den Wert $b = 0.5$. Die Raumfahrzeuge befinden sich während der beiden solaren Ereignisse nicht auf derselben Feldlinie, so daß Annahmen über die Injektionsfunktion und über die Ausbreitungsbedingungen in verschiedenen Flußröhren notwendig sind. Zusätzlich gibt BEECK [1987] einen Wert von $b = 0.35$ an, den er aus dem M_2 -Koeffizienten der PWVs verschiedener auf HELIOS 1 und 2 gemessener solarer Ereignisse berechnet hat. Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß er die diffusive Näherung verwendet, so daß es speziell bei der Näherung der zeitabhängigen Transportgleichung zu Ungenauigkeiten kommt (siehe Abschnitt 5.4). Desweiteren bestimmt HAMILTON [1977] einen Wert von $b = 0.4 \pm 0.2$, indem er die Intensitätsprofile von vier verschiedenen solaren Ereignissen auf Pioneer 10 und 11 auswertet. Es handelt sich dabei um Protonen im Energiebereich von 11 bis 67 MeV, die bei radialen Abständen von 1 bis 6 AU gemessen wurden. ZWICKEL AND WEBBER [1977] analysieren hingegen nicht einzelne Ereignisse, sondern ermitteln aus einer ganzen Reihe von verschiedenen Protonenereignissen im Energiebereich von 4 bis 26 MeV, die bei einem radialen Abstand von 1 bis 5 AU auf Pioneer 10 und 11 gemessen wurden, einen statistischen Mittelwert von $b = 0.0 \pm 0.2$. Bei der Auswertung in dieser Arbeit kommt es ebenfalls mehr auf statistische Aussagen über die Ausbreitungsparameter an als darauf, für individuelle Ereignisse die vorherrschenden Ausbreitungsbedingungen möglichst gut zu bestimmen. Aus diesem Grund wird für den b -Parameter ebenfalls ein Wert von $b = 0$ angenommen, da die Aussage von ZWICKEL AND WEBBER [1977] auf der Auswertung eines statistischen Ensembles von mehr als zehn solaren Ereignissen beruht. Dies steht auch in Übereinstimmung mit KALLENRODE [1993], der es mit der Annahme $b = 0$ gelingt, eine ganze Reihe von solaren Ereignissen auf HELIOS 1 und 2 in ihrem zeitlichen Verlauf zu fitten, womit zumindest die Konsistenz der Annahme mit den Meßwerten überprüft ist.

Der Prozeß des Fittens der numerischen Lösungen an die gemessenen Zeitprofile der omnidirektionalen Intensität g_0 und der Anisotropie ξ_1 ist eine mühselige Prozedur, da immer neue Kombinationen von Injektionsfunktionen und radialen mittleren freien Weglängen ausprobiert werden müssen. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Reid-Axford-Profil bedeutet dies, daß die Transportgleichung (2.58) in einem iterativen Prozeß immer wieder für unterschiedliche Parameter t_A , t_V und λ_r gelöst werden muß. Nach wieviel Iterationsschritten es zu

einer guten Übereinstimmung zwischen den Meßdaten und der numerischen Lösung kommt, hängt entscheidend von der Erfahrung der Person ab, die das Fitten durchführt. Dabei stellt sich die Frage, ob es möglich ist, die oben genannten Parameter eindeutig zu bestimmen, selbst wenn man die radiale Abhängigkeit der mittleren freien Weglänge λ_r korrekt vorgibt.

6.2.2 Bestimmung von λ_r aus den stationären Anisotropien ξ_{1s}

Das eben angesprochene Problem kann umgangen werden, indem man das steady-state-Theorem aus Abschnitt 2.2.3 verwendet. Die so bestimmte stationäre Anisotropie erster Ordnung ξ_{1s} ist unabhängig von der Injektionsfunktion. Bei festgelegtem radialem Verlauf der Streuung entlang der Magnetfeldlinie ergibt sich damit bei einer bestimmten Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw} nur noch eine Abhängigkeit von dem Betrag der radialen mittleren freien Weglänge λ_r am Beobachtungsort. Für die in dieser Arbeit als vom radialen Abstand unabhängig angenommene radiale mittlere freie Weglänge, d. h. $\lambda_r = \text{const}$, braucht daher nur eine Kurvenschar der Anisotropie ξ_{1s} für unterschiedliche λ_r -Werte in Abhängigkeit vom radialen Abstand r berechnet zu werden.

In Abbildung 6.2 ist die stationäre Anisotropie ξ_{1s} über dem radialen Abstand im Bereich von $r = 0.2$ AU bis $r = 1.1$ AU aufgetragen. Das räumliche Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ist durch eine als konstant angenommene radiale mittlere freie Weglänge λ_r und eine durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes für eine Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 400$ km/s bestimmte Fokussierungslänge L festgelegt. Die Kurve der Anisotropie ξ_{1s} mit dem geringsten Betrag entspricht einer radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_r = 0.05$ AU. In Abständen von 0.05 AU folgen dann weitere radiale mittlere freie Weglängen bis zum maximalen Wert von $\lambda_r = 0.5$ AU. Die Form des PWSK, die speziell für die kleineren radialen mittleren freien Weglängen nur einen sehr geringen Einfluß auf den Betrag der stationären Anisotropie ξ_{1s} hat, wird durch die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ festgelegt.

Diese Art der Darstellung der stationären Anisotropie ist bereits in Abschnitt 4.6.2.1 eingeführt worden. Der Unterschied der Abbildungen 6.2 und 4.10 besteht darin, daß in Abbildung 4.10 nur die Kurven für $\lambda_r = 0.1$ AU und $\lambda_r = 0.4$ AU eingezeichnet sind (gestrichelte Kurven)⁴. Für die stationären Lösungen der Transportgleichung (2.58) ist die Geschwindigkeit der Teilchen im Gegensatz zu den Lösungen der erweiterten Transportgleichung (4.1) ohne Bedeutung (siehe Abschnitt 2.2.4), so daß anhand der Abbildung 6.2 die radialen mittleren freien Weglängen für alle in Tabelle 1.1 aufgeführten Energiekanäle des E6-Experiments bestimmt werden können. Bei der Methode des Fittens müssen hingegen für unterschiedliche Geschwindigkeiten der Teilchen die entsprechenden numerischen Lösungen berechnet werden, da die Injektionsfunktion (3.91) mit der Geschwindigkeit zu skalieren ist (siehe Gleichung (2.69)).

Die Bestimmung der radialen mittleren freien Weglänge erfolgt nun im Detail, indem man zunächst separat über die Zeitverläufe des g_0 - und g_1 -Koeffizienten integriert. Ein eventuell vorhandener Untergrund ist dabei zu berücksichtigen. Desweiteren darf das solare Ereignis nicht durch eine interplanetare Stoßwelle (Schock) beeinflusst sein, speziell dann nicht, wenn sich der Einfluß über das Maximum der g_0 - und g_1 -Koeffizienten erstreckt. Ereignisse

⁴Vergleicht man die gestrichelten Kurven der Abbildung 4.10 mit den entsprechenden Kurven in Abbildung 6.2, so ergeben sich geringfügige Unterschiede, die folgende Ursache haben: Die Berechnungen in Abbildung 6.2 sind mit dem GREF-Programm bei einer räumlichen Schrittweite von $\Delta s = 0.005$ AU und einer äußeren Grenze von $s_b = 24$ AU durchgeführt worden. Die Berechnungen in Abbildung 4.10 wurden hingegen mit dem NREF-Programm bei einer räumlichen Schrittweite von $\Delta s = 0.01$ AU und einer äußeren Grenze von $s_b = 12$ AU durchgeführt.

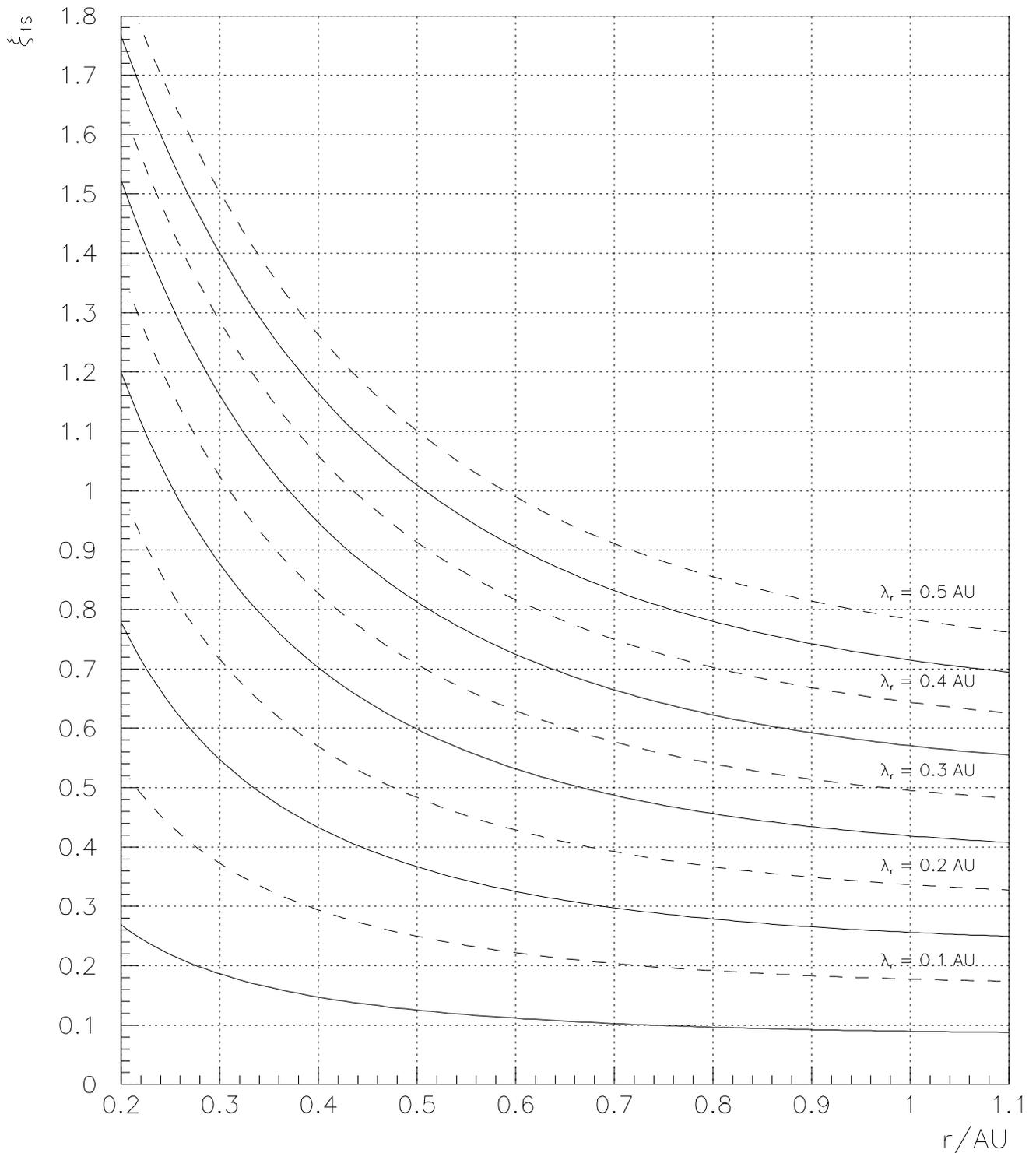


Abbildung 6.2: Die stationäre Anisotropie ξ_{1s} ist für unterschiedliche als konstant angenommene radiale mittlere freie Weglängen λ_r über dem radialen Abstand aufgetragen. Die Abstufung der radialen mittleren freien Weglängen erfolgt in Schritten von 0.05 AU mit einem minimalen Wert von $\lambda_r = 0.05$ AU (untere durchgezogene Kurve) und einem maximalen Wert von $\lambda_r = 0.5$ AU (obere gestrichelte Kurve). Die Sonnenwindgeschwindigkeit beträgt $v_{sw} = 400$ km/s; der PWSK hat die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

mit Datenlücken in der Nähe des Maximums oder starkem Übersprechen zwischen den verschiedenen Energiekanälen sind ebenfalls auszuschließen. Mit den so gewonnenen g_{0s} - und g_{1s} -Koeffizienten kann die stationäre Anisotropie ξ_{1s} berechnet werden. Da der radiale Abstand r zum Zeitpunkt der Messung bekannt ist, kann die stationäre Anisotropie ξ_{1s} in die Abbildung 6.2 eingetragen werden. Der statistische Fehler der stationären Anisotropie ξ_{1s} ist dabei in der Regel ohne Bedeutung, da die g_0 - und g_1 -Koeffizienten über das gesamte Ereignis integriert werden. Ermittelt man nun die Kurve, die dem Meßwert der stationären Anisotropie ξ_{1s} am nächsten ist, so kann man anhand der dazugehörigen radialen mittleren freien Weglänge die mittlere freie Weglänge λ_r des solaren Ereignisses bestimmen. Für radiale mittlere freie Weglängen von $\lambda_r \leq 0.2$ AU kann man dabei durch Interpolation der Kurven den Wert bis auf ± 0.025 AU genau bestimmen. Für größere radiale mittlere freie Weglängen ergibt sich hingegen ein systematischer Fehler des Verfahrens von ± 0.05 AU, da die Kurven dichter zusammenrücken, wie man in Abbildung 6.2 erkennen kann. Zusätzlich muß natürlich berücksichtigt werden, wie gut die oben genannten Voraussetzungen (Abwesenheit von interplanetaren Stoßwellen, Datenlücken und Übersprechen) gewährleistet sind. Der Fehler ist daher bei entsprechenden Einflüssen abzuschätzen und zum systematischen Fehler der Methode hinzuzuaddieren.

Wendet man sich noch einmal dem Problem der Berücksichtigung der Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration zu und vergleicht die durchgezogenen Kurven in Abbildung 4.10 für die Teilchen mit unterschiedlich hohen Geschwindigkeiten mit den Kurven in Abbildung 6.2, so wird deutlich, daß bei der Methode der Bestimmung der radialen mittleren freien Weglänge aus Abbildung 6.2 ein systematischer Fehler begangen wird. Die Kurven der stationären Anisotropie ξ_{1s} für eine bestimmte radiale mittlere freie Weglänge liegen unter den Kurven, die man bei der Berücksichtigung der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration erhält. Für die radialen mittleren freien Weglängen werden somit systematisch zu große Werte bestimmt. Wie stark dieser Effekt ist, hängt natürlich von der Teilchengeschwindigkeit v und damit von der Energie und der Masse der Teilchen ab. Für die Elektronen des E03- und des E08-Kanals sind die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration demnach zu vernachlässigen. Für den Protonenkanal P27 mit der höchsten Energie werden die radialen mittleren freien Weglängen um ≈ 0.025 AU überschätzt, und für die α -Teilchen des A2-Kanals, die von allen Energiekanälen in Tabelle 1.1 die geringste Geschwindigkeit haben, dürften die radialen mittleren freien Weglängen um ≈ 0.05 AU zu groß bestimmt werden. Dies macht sich besonders dann bemerkbar, wenn die radialen mittleren freien Weglängen bereits gering sind (siehe Abschnitt 4.6.2.1).

Eine weitere Unsicherheit bei der Bestimmung kleiner radialer mittlerer freier Weglängen ergibt sich aus der langen Integrationszeit über die Zeitprofile der g_0 - und g_1 -Koeffizienten. Zum einen kann die Annahme konstanter Ausbreitungsbedingungen über so große Zeiträume (siehe Abschnitt 3.3) nicht aufrechterhalten werden, wie bereits in Abschnitt 6.1 bemerkt wurde. Zum anderen hat der Effekt der Korotation der Archimedischen Spirale noch eine weitere Auswirkung, da die absolute Größe der omnidirektionalen Intensität g_0 , die durch die Injektionsfunktion bestimmt wird, nicht für alle Magnetfeldlinien dieselbe ist. In Abhängigkeit vom azimuthalen Abstand der Magnetfeldlinie von dem eigentlichen Ort, an dem die Teilchen beschleunigt wurden, variiert die omnidirektionale Intensität. Wechselt der Beobachter aufgrund der Korotation der Archimedischen Spirale die Magnetfeldlinien, so wird die gemessene omnidirektionale Intensität durch die azimuthale Abhängigkeit der Injektionsfunktion beeinflusst, was sich besonders zu späten Zeiten bemerkbar macht.

Die Berechnung der stationären Anisotropie ξ_{1s} in Abbildung 6.2 wurde unter der Annahme gemacht, daß der räumliche Verlauf des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ durch die radial konstante radiale mittlere freie Weglänge λ_r und durch eine Fokussierungslänge L festgelegt ist, die durch eine Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 400$ km/s indirekt über die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes bestimmt ist. Da die Sonnenwindgeschwindigkeit v_{sw} jedoch in der Realität von Ereignis zu Ereignis einer gewissen Schwankung unterworfen ist (siehe Anhang E), ist es notwendig, diese Kurvenschar der Anisotropie ξ_{1s} für unterschiedliche Sonnenwindgeschwindigkeiten v_{sw} zu berechnen. Das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ist zwar bei einem radialen Abstand von $r < 1$ AU nur geringfügig von der Sonnenwindgeschwindigkeit abhängig (siehe Abbildung 2.6); dies ändert sich jedoch mit zunehmendem radialen Abstand. Für die stationäre Anisotropie ξ_{1s} bedeutet dies eine verstärkte Abhängigkeit von der Sonnenwindgeschwindigkeit, da es sich um eine globale Größe handelt, die auch von dem radialen Verlauf des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ in dem räumlichen Bereich mit $r > 1$ AU beeinflußt wird. Zu diesem Zweck sind im Anhang D ergänzend die Kurvenscharen der Anisotropie ξ_{1s} für folgende Sonnenwindgeschwindigkeiten aufgetragen: $v_{sw} = 200$ km/s, 300 km/s, 500 km/s und 600 km/s.

6.2.3 Ergebnisse

Die nach dem im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Verfahren bestimmten radialen mittleren freien Weglängen λ_r sind im Anhang E für verschiedene solare Ereignisse aufgelistet. Bei der Bestimmung wurde darauf geachtet, daß die solaren Ereignisse nur in geringem Maße von interplanetaren Stoßwellen, Übersprechen der Teilchen in unterschiedliche Energiekanäle und Datenlücken beeinflußt sind. Als Resultat dieser Auswahlkriterien ergeben sich für die gesamte Missionsdauer der HELIOS-Satelliten 24 solare Ereignisse, die den strengen Auswahlkriterien genügen. Die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration bleiben unberücksichtigt und führen entsprechend dem Energiekanal, wie im vorhergehenden Abschnitt besprochen, zu einer Verringerung der radialen mittleren freien Weglänge um maximal ≈ 0.05 AU.

6.2.3.1 Vergleich mit den Ergebnissen des Fit-Verfahrens

Von besonderem Interesse ist es, die aus den stationären Anisotropien ξ_{1s} bestimmten radialen mittleren freien Weglängen mit den von KALLENRODE [1993] aus den zeitlichen Profilen der omnidirektionalen Intensität g_0 und der Anisotropie ξ_1 durch Anpassung der numerischen Lösungen (Fit) ermittelten radialen mittleren freien Weglängen zu vergleichen. Dies bietet sich an, da die Untersuchung von KALLENRODE [1993] eine große Anzahl von solaren Ereignissen des gleichen Datensatzes des E6-Experiments auf den HELIOS-Satelliten umfaßt. Leider zeigt es sich, daß die Schnittmenge der 27 von KALLENRODE [1993] ausgewerteten solaren Ereignisse mit den 24 in dieser Arbeit ausgewerteten Ereignissen nur klein ist.

KALLENRODE [1993] führt in ihrer Auswertung zwei Gruppen von Ereignissen ein: die sogenannten “unbeeinflußten” und die “kontaminierten” Ereignisse. Die “kontaminierten” Ereignisse sind durch übersprechende Protonen beeinflußt, die sich besonders bei großen Verhältnissen der Protonen zu Elektronen bei interplanetaren Stoßwellen und bei protonenreichen Ereignissen zum Zeitpunkt des Intensitätsmaximums einstellen. Diese Gruppe der “kontaminierten” Ereignisse umfaßt immerhin 13 Ereignisse, die für den Vergleich nur bedingt zu verwenden sind, da die Auswertungsmethode der stationären Anisotropien ξ_{1s} auf

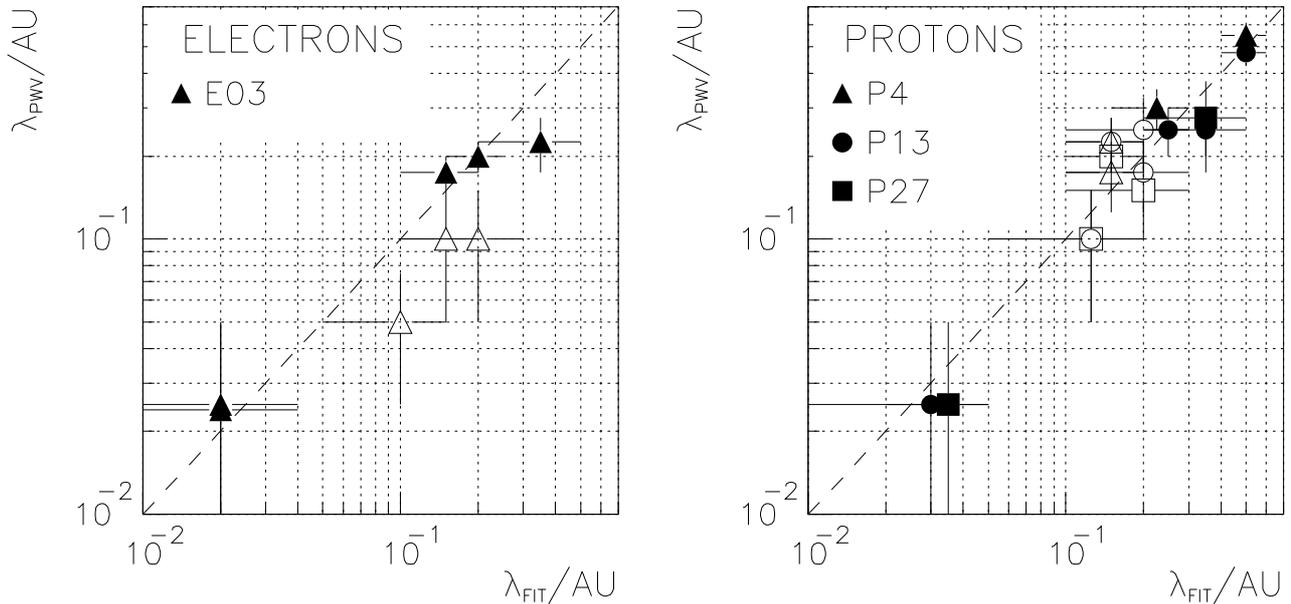


Abbildung 6.3: Die mit Hilfe der Fit-Methode bestimmten radialen mittleren freien Weglängen λ_{FIT} von KALLENRODE [1993] werden mit den aus den stationären Anisotropien ξ_{1s} bestimmten λ_{PWV} -Werten für auf den HELIOS-Satelliten mit dem E6-Experiment gemessene solare Ereignisse gegeneinander aufgetragen. Dabei wird zwischen den Elektronen des E03-Kanals (links) und den Protonen der Kanäle P4, P13 und P27 unterschieden. Anhand der Symbole werden zuverlässige (ausgefüllte Symbole) und weniger zuverlässige (offene Symbole) Datenpunkte unterschieden (siehe Text).

diese Einflüsse empfindlich reagiert. KALLENRODE [1993] beschränkt sich bei der Anpassung der Zeitprofile im wesentlichen auf den Zeitbereich, der sich vom Beginn des Ereignisses bis kurz hinter das Intensitätsmaximum erstreckt. Liegt in diesem Bereich ein offensichtliches Übersprechen vor, dann kann dies beim Fitten berücksichtigt werden, so daß man noch einigermaßen zuverlässige Fit-Parameter erhält. Auch Einflüsse durch interplanetare Stoßwellen zu einem Zeitpunkt deutlich hinter dem Intensitätsmaximum sind nur von geringer Bedeutung. Integriert man hingegen über das gesamte Zeitprofil des g_0 - und g_1 -Koeffizienten, so ist man deutlich empfindlicher gegenüber diesen unerwünschten Einflüssen.

In Abbildung 6.3 sind die radialen mittleren freien Weglängen λ_r beider Methoden für die solaren Ereignisse gegeneinander aufgetragen, für die eine Bestimmung mit beiden Methoden möglich ist. Die mit Hilfe der stationären Anisotropie ξ_{1s} bestimmten radialen mittleren freien Weglängen sind dabei als λ_{PWV} bezeichnet, die der Fit-Methode als λ_{FIT} . Da KALLENRODE [1993] sich auf die Energiekanäle E03, P4, P13 und P27 beschränkt, sind im linken Teil der Abbildung die radialen mittleren freien Weglängen der Elektronen des E03-Kanals und im rechten Teil die Protonen des P4-, P13- und P27-Kanals gegeneinander aufgetragen. Die Fehlerbalken der λ_{FIT} -Werte sind dabei der Tabelle 1 von KALLENRODE [1993] entnommen. Da in dieser Tabelle für das Ereignis vom 25. März 1980 auf HELIOS 1 kein Fehler angegeben ist, wurde ein Fehler von ± 0.05 AU ergänzt. Die λ_{PWV} -Werte der Auswertungsmethode der

stationären Anisotropien ξ_{1s} werden, wie schon bei KALLENRODE [1993] in zwei Klassen unterteilt. Erfüllt ein bestimmtes Ereignis die Auswahlkriterien, so ist das entsprechende Symbol in Abbildung 6.3 ausgefüllt. Für die Fehlerbalken der λ_{PWV} -Werte sind dann die systematischen Fehler von ± 0.025 AU für $\lambda_r \leq 0.2$ AU und von ± 0.05 AU für $\lambda_r > 0.2$ AU angegeben, die sich aus der graphischen Bestimmung der λ_{PWV} -Werte ergeben. Da sich die Schnittmenge mit den λ_{FIT} -Werten nur auf fünf solare Ereignisse beschränkt, sind noch für weitere vier Ereignisse die λ_{PWV} -Werte ermittelt worden, die nicht den strengen Anforderungen in dieser Arbeit genügen. Diese vier Ereignisse sind ebenfalls in Anhang E aufgeführt, werden jedoch bis auf die Abbildung 6.3 in dieser Arbeit nicht weiter verwendet. Die λ_{PWV} -Werte dieser Ereignisse, von denen drei zu den von KALLENRODE [1993] als “kontaminiert” bezeichneten Ereignissen gehören, sind durch offene Symbole kenntlich gemacht. Die Fehlerbalken dieser λ_{PWV} -Werte wurden abgeschätzt und sind im allgemeinen größer als die Fehlerbalken, die sich aus der graphischen Bestimmungsmethode ergeben.

Die Gegenüberstellung der λ_{PWV} - und λ_{FIT} -Werte für Protonen im rechten Teil der Abbildung 6.3 ist auch bei HATZKY, WIBBERENZ, AND BIEBER [1995] und WIBBERENZ, HATZKY, AND BIEBER [1995] zu finden, mit dem geringfügigen Unterschied, daß die Auswahlkriterien dort weniger restriktiv sind und nicht zwischen den ausgefüllten und offenen Symbolen unterschieden wird. Die von diesen Autoren gemachten Aussagen können dennoch übernommen und auf die im linken Teil der Abbildung 6.3 dargestellten λ_{PWV} - und λ_{FIT} -Werte der Elektronen ausgedehnt werden: Die Übereinstimmung der λ_{PWV} - und λ_{FIT} -Werte ist, unabhängig davon, ob es sich um kleine oder große Werte handelt, innerhalb der Fehlerbalken gut. Es zeigt sich somit auch in der Praxis, daß beide Methoden zur Bestimmung der radialen mittleren freien Weglänge die gleichen Ergebnisse liefern.

Dabei müssen, wie oben schon erwähnt, bei der Fit-Methode die radiale mittlere freie Weglänge und das Injektionsprofil, z. B. in Form eines Reid-Axford-Profiles, mit den Parametern t_A und t_V gleichzeitig bestimmt werden. Bei der Bestimmung der radialen mittleren freien Weglänge aus der stationären Anisotropie ξ_{1s} ist eine Annahme über den zeitlichen Verlauf des Injektionsprofils nicht notwendig. Trotzdem ergeben beide Methoden die gleichen radialen mittleren freien Weglängen. Daraus folgt, daß die bei der Fit-Methode notwendigen Annahmen über die Injektionsfunktion es trotzdem gestatten, die radiale mittlere freie Weglänge zuverlässig zu bestimmen. Da dies für eine ganze Reihe von Ereignissen mit unterschiedlichen radialen mittleren freien Weglängen und Injektionsprofilen gilt, ist es sehr wahrscheinlich, daß die aus der Fit-Methode bestimmten Injektionsprofile ebenfalls im Rahmen des Transportmodells zuverlässig sind. Man kann somit den iterativen Prozeß des Fittens deutlich verkürzen, indem man zunächst aus der stationären Anisotropie ξ_{1s} die radiale mittlere freie Weglänge bestimmt und so einen der Parameter beim Fitten festlegt. Die Anpassung beschränkt sich im weiteren Verlauf dann nur noch auf die Injektionsfunktion, die man auf diese Weise aus der Fit-Methode ermitteln kann.

6.2.3.2 Die radiale Abhängigkeit

In Abschnitt 6.2.3.1 hat sich gezeigt, daß sich die radialen mittleren freien Weglängen der Fit-Methode λ_{FIT} und die λ_{PWV} -Werte aus der stationären Anisotropie ξ_{1s} kaum voneinander unterscheiden. Daraus folgt jedoch, daß aus den λ_{PWV} -Werten keine grundsätzlich neuen Erkenntnisse bezüglich der radialen Abhängigkeit, der absoluten Werte (siehe Abschnitt 6.2.3.3) und der Steifigkeitsabhängigkeit (siehe Abschnitt 6.2.3.4) der radialen mitt-

leren freien Weglängen zu erwarten sind. Anhand einer Auswahl von solaren Ereignissen, die sich zum Teil mit den von KALLENRODE [1993] untersuchten Ereignissen deckt, darüber hinaus aber auch andere Ereignisse berücksichtigt, werden die von KALLENRODE [1993] gemachten Aussagen bestätigt und auf eine breitere Datengrundlage gestellt. Die folgende Diskussion wird daher knapp gehalten und orientiert sich im wesentlichen an der Diskussion von KALLENRODE [1993].

In Abbildung 6.4 sind die radialen mittleren freien Weglängen der Energiekanäle E03 und E08 der Elektronen (oberer Teil), der Energiekanäle P4, P13 und P27 der Protonen (mittlerer Teil) und der Energiekanäle A2, A4 und A13 der α -Teilchen (unterer Teil) über dem radialen Abstand aufgetragen. Betrachtet man die radiale Abhängigkeit aller Teilchensorten, so fällt auf, daß die großen radialen mittleren freien Weglängen unabhängig von der Teilchensorte keine radiale Abhängigkeit aufweisen, während die kleinen radialen mittleren freien Weglängen scheinbar gehäuft bei kleinen radialen Abständen auftreten. Auf diesen Umstand hat bereits KALLENRODE [1993] hingewiesen und erklärt ihn folgendermaßen: Je kleiner die mittlere freie Weglänge ist, desto später erreicht die omnidirektionale Intensität ihr Maximum.

Der genaue Zusammenhang zwischen dem Zeitpunkt des Intensitätsmaximums t_{\max} , der zurückgelegten Wegstrecke s und dem Diffusionskoeffizienten D läßt sich für die diffusive Näherung bestimmen (vgl. SCHLÜTER [1985], S. 51):

$$t_{\max} = \frac{s^2}{2D} \quad (6.4)$$

Der Diffusionskoeffizient D ist dabei mit der mittleren freien Weglänge $\lambda_{||}$ durch die Beziehung (vgl. GERTHSEN UND VOGEL [1995], S. 240)

$$D = \frac{1}{3}v\lambda_{||} \quad (6.5)$$

verbunden. Speziell für kleine mittlere freie Weglängen und große radiale Abstände ergeben sich solare Ereignisse, die sich über einen langen Zeitraum erstrecken und kaum noch als solche zu identifizieren sind. Erschwert wird dies noch in Perioden, in denen die Sonne sehr aktiv und der Untergrundlevel ohnehin schon erhöht ist, so daß sich nur sehr teilchenreiche Ereignisse bemerkbar machen. Daher ist es nicht verwunderlich, daß das einzige Ereignis mit einer geringen radialen mittleren freien Weglänge von $\lambda_{E03} = 0.05$ AU und einem radialen Abstand von $r = 0.966$ AU am 25. Dezember 1974 auf HELIOS 1 in einer Phase geringer Sonnenaktivität beobachtet wurde.

Ist man sich dieses unbeabsichtigten Auswahleffektes, welcher solare Ereignisse mit kleinen radialen mittleren freien Weglängen bei großen radialen Abständen unterdrückt, bewußt, so sind die gemessenen radialen mittleren freien Weglängen aller hier aufgeführten Teilchensorten und Energien mit der Annahme einer konstanten radialen mittleren freien Weglänge verträglich. Dies ist eine bemerkenswerte Tatsache, da die stationären Anisotropien ξ_{1s} in Abbildung 6.2 wegen der räumlichen Abhängigkeit des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ (siehe Abbildung 2.6) eine deutliche räumliche Abhängigkeit aufweisen und zeigt, daß es in der inneren Heliosphäre notwendig ist, den Effekt der Fokussierung zu berücksichtigen.

6.2.3.3 Die absoluten Werte der radialen mittleren freien Weglänge

Von einer Mittelung über alle Ereignisse (vgl. KALLENRODE [1993]), die dazu dient, ein mittleres Maß für die radiale mittlere freie Weglänge in Abhängigkeit von der Teilchensorte zu

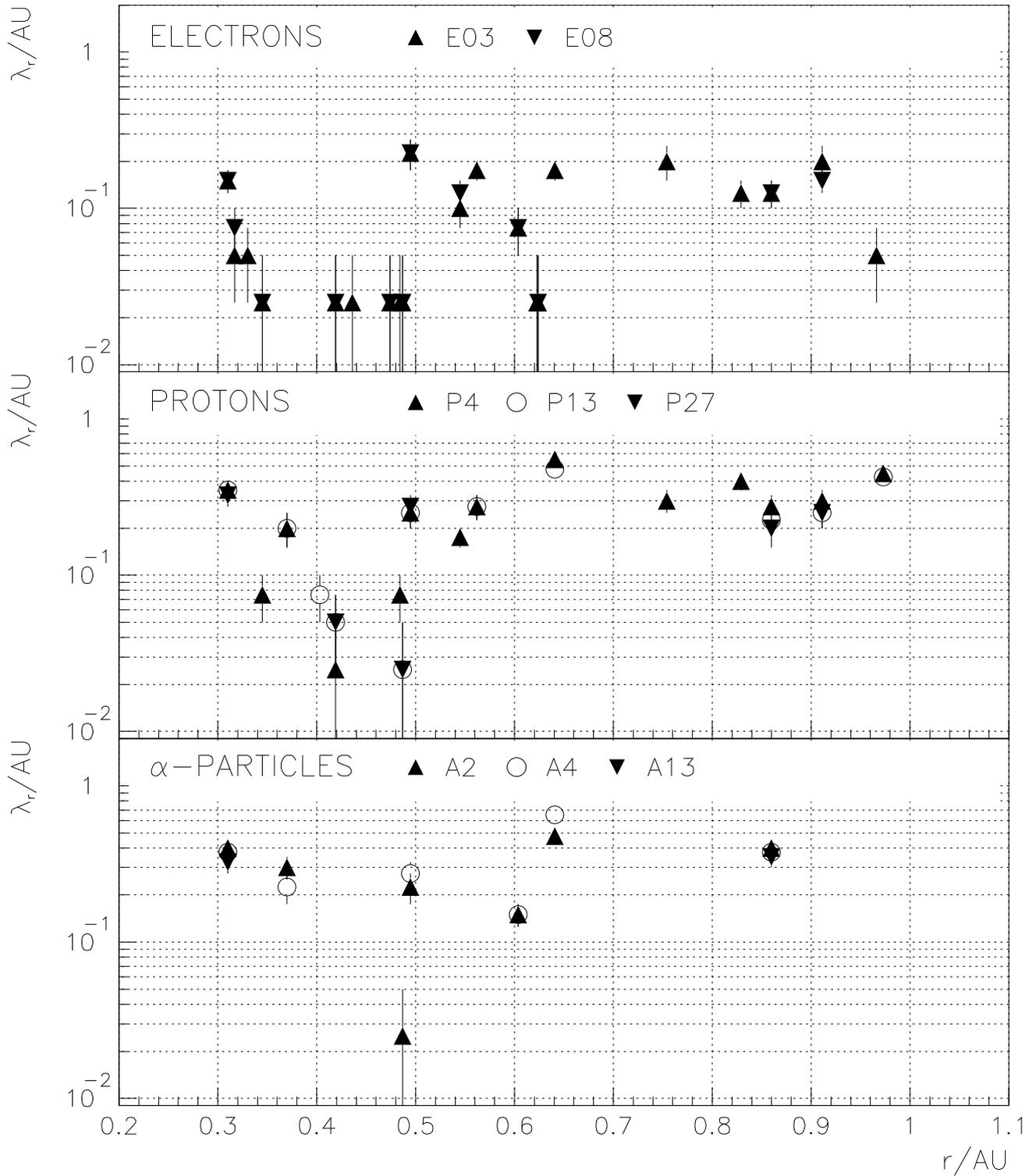


Abbildung 6.4: Die aus der stationären Anisotropie ξ_{1s} bestimmten radialen mittleren freien Weglängen sind für Elektronen (oberer Teil), Protonen (mittlerer Teil) und α -Teilchen (unterer Teil) über dem radialen Abstand aufgetragen. Die Energiekanäle des E6-Experiments sind durch verschiedene Symbole gekennzeichnet. Die eingezeichneten Fehlerbalken ergeben sich aus dem systematischen Fehler der graphischen Bestimmungsmethode (siehe Text).

erhalten, wird hier abgesehen, da die einzelnen solaren Ereignisse sich im λ_r um einen Faktor von bis zu ≈ 20 unterscheiden können. Die Ereignisse weisen damit eine große individuelle Schwankungsbreite auf. Einige dieser Ereignisse sind deutlich von der Pitchwinkelstreuung dominiert, wie die kleinen radialen mittleren freien Weglängen zeigen. Rechnet man die radialen mittleren freien Weglängen λ_r nach Gleichung (2.25) in mittlere freie Weglängen $\lambda_{||}$ um, so zeigt sich für die Protonen, daß für die meisten Ereignisse die mittlere freie Weglänge im “Palmer consensus range” zwischen 0.08 AU und 0.3 AU (siehe PALMER [1982]) liegt. Die mittleren freien Weglängen fügen sich zudem in den erweiterten “consensus range” von BIBBER ET AL. [1994] ein, der sich aus einer Untersuchung einer Vielzahl von solaren Ereignissen über einen großen Steifigkeitsbereich für Protonen und Elektronen ergibt. Die mittleren freien Weglängen sind damit zu groß, als daß man sie mit dem konventionellen Standardmodell aus den gemessenen Spektren der Magnetfeldfluktuationen (siehe Abschnitt 2.1.2) erklären könnte (siehe WANNER [1993], S. 161ff.).

Beim Vergleich der mittleren freien Weglängen $\lambda_{||}$ mit aus theoretischen Modellen der Pitchwinkelstreuung hergeleiteten mittleren freien Weglängen ist noch einmal darauf hinzuweisen, daß die eigentliche Meßgröße die radiale mittlere freie Weglänge λ_r ist, d. h. daß die (lokale) mittlere freie Weglänge unter der Annahme eines bestimmten radialen Verlaufs der Streuung aus den Meßdaten bestimmt worden ist. Diese Information geht aber verloren, wenn man nur die mittleren freien Weglängen vergleicht, da die gleichen Meßdaten je nach Annahme der Autoren über den räumlichen Verlauf der Pitchwinkelstreuung zu unterschiedlichen mittleren freien Weglängen führen können (siehe Abschnitt 5.2.2). Bestimmt man hingegen die mittleren freien Weglängen aus den M_{ns} -Koeffizienten, so sind diese tatsächlich lokale Größen, die mit den aus den radialen mittleren freien Weglängen λ_r berechneten mittleren freien Weglängen $\lambda_{||}$ nur dann übereinstimmen, wenn der angenommene radiale Verlauf der Streuung dem tatsächlichen Verlauf entspricht!

Eine zusätzliche Annahme über die Form des PWSK muß für große Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ gemacht werden, da sich im Modell der fokussierten Pitchwinkelstreuung bei der Bestimmung der radialen mittleren freien Weglänge eine Abhängigkeit von der Form des PWSK bemerkbar macht. Desweiteren ergibt sich bei großen mittleren freien Weglängen das Problem, daß die Streuung nicht im homogenen Magnetfeld stattfindet, sondern unter Einwirkung der Fokussierung. Da die theoretischen Modelle zur Pitchwinkelstreuung dies in der Regel nicht berücksichtigen, werden zwei unterschiedliche Größen miteinander verglichen.

Ist die Pitchwinkelstreuung hingegen hinreichend stark, d. h. die mittlere freie Weglänge klein, so verlieren die räumliche Abhängigkeit der Streuung, die Form des PWSK und auch die Tatsache, daß das Magnetfeld auf größeren Skalen inhomogen ist, ihre Bedeutung, und die mittleren freien Weglängen können mit den aus den theoretischen Modellen aufgrund der Eigenschaften des interplanetaren Mediums vorhergesagten Werten verglichen werden.

6.2.3.4 Die Steifigkeitsabhängigkeit

Zusätzlich zu den bei KALLENRODE [1993] bestimmten radialen mittleren freien Weglängen der Energiekanäle E03, P4, P13 und P27 sind in dieser Arbeit die Werte für die Elektronen des E08-Kanals und der Energiekanäle der α -Teilchen A2, A4 und A13 bestimmt worden.

Die radialen mittleren freien Weglängen der Elektronen des E03- und E08-Kanals stimmen, wie man anhand der Abbildung 6.4 sieht, innerhalb ihrer Fehlerbalken überein. Dies ist zu erwarten, da die durchschnittlichen Steifigkeiten beider Kanäle mit 1.4 MV und 3.0 MV

sehr dicht beieinander liegen. Differieren die radialen mittleren freien Weglängen hingegen, so ist dies ein Hinweis darauf, daß das solare Ereignis entweder durch die Auswirkungen einer interplanetaren Stoßwelle beeinflusst ist oder ein Übersprechen der Protonen in die Elektronenkanäle vorliegt. Die Übereinstimmung der radialen mittleren freien Weglängen des E03- und E08-Kanals kann daher auch so interpretiert werden, daß die hier untersuchten solaren Ereignisse nur in geringem Maße durch Schocks und Übersprechen der Protonen in die Elektronenkanäle beeinflusst sind.

Die Protonenkanäle zeigen innerhalb der Fehlerbalken keine eindeutige Steifigkeitsabhängigkeit. Dies deckt sich mit dem Ergebnis von KALLENRODE [1993], steht aber im Gegensatz zur Aussage von BIEBER ET AL. [1994]. Letztere Autoren betonen, daß für fünf solare Ereignisse eine Zunahme der mittleren freien Weglänge mit der Steifigkeit für Protonen nachgewiesen werden kann. Selbst wenn man die stationären Anisotropien ξ_{1s} der Protonenkanäle P4, P13 und P27 direkt miteinander vergleicht (siehe Anhang E), um so die Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der radialen mittleren freien Weglängen durch die graphische Bestimmungsmethode zu umgehen, zeigt sich keine eindeutige Steifigkeitsabhängigkeit. Zwei der von BIEBER ET AL. [1994] angegebenen Ereignisse werden auch in dieser Arbeit untersucht:

Die stationären Anisotropien ξ_{1s} für das Ereignis vom 11. April 1978 auf HELIOS 2, das von VALDÉS-GALICIA ET AL. [1988] in vier Protonenkanälen untersucht worden ist, konnte nur für den P13- und P27-Kanal mit den Werten $\xi_{1s} = 0.075$ und $\xi_{1s} = 0.086$ bestimmt werden. Dies stimmt mit dem Ergebnis von VALDÉS-GALICIA ET AL. [1988] überein; allerdings reichen die beiden Meßwerte für sich betrachtet noch nicht aus, um auf eine Zunahme der mittleren freien Weglänge mit der Steifigkeit zu schließen.

Das von KALLENRODE [1993] untersuchte Ereignis vom 25. März 1980 auf HELIOS 1 weist mit den Werten $\xi_{1s} = 0.594$ für den P4-Kanal, $\xi_{1s} = 0.523$ für den P13-Kanal und $\xi_{1s} = 0.521$ für den P27-Kanal sogar eine Abnahme der mittleren freien Weglänge mit der Steifigkeit auf. Dies steht nicht unmittelbar im Widerspruch zueinander, wenn man die von KALLENRODE [1993] angegebenen Unsicherheiten der radialen mittleren freien Weglängen berücksichtigt. So zeigt auch das Ereignis vom 9. Juni 1979 auf HELIOS 2, das ebenfalls von KALLENRODE [1993] ausgewertet und von BIEBER ET AL. [1994] angeführt wird, innerhalb der Unsicherheiten keine eindeutige Zunahme der mittleren freien Weglänge mit der Steifigkeit.

Betrachtet man noch einmal alle im Anhang E aufgeführten Ereignisse bezüglich der stationären Anisotropie ξ_{1s} daraufhin, ob sich eine Abnahme bzw. Zunahme mit der Steifigkeit für die Protonenkanäle ergibt, so zeigt sich bei fünf Ereignissen eine Abnahme, bei drei Ereignissen eine Zunahme und zwei Ereignisse zeigen keinen eindeutigen Trend. Wie bereits gesagt, ist daraus eine eindeutige Steifigkeitsabhängigkeit der mittleren freien Weglängen der Protonen in dem hier betrachteten Bereich von ≈ 100 MV bis ≈ 250 MV nicht abzuleiten. Betrachtet man den aus dem Standardmodell (siehe Gleichung (6.7)) zu erwartenden Unterschied zwischen den Steifigkeiten des P4- und des P27-Kanals, so ist ohnehin nur ein Faktor von 1.3 zu erwarten.

Die α -Teilchen zeigen bis auf zwei Ereignisse hinsichtlich ihrer Steifigkeit ein sehr ähnliches Verhalten wie die Protonen. Bei den beiden Ereignissen vom 27. Juli 1975 und vom 19. November 1981 auf HELIOS 1 nehmen die radialen mittleren freien Weglängen der α -Teilchen signifikant größere Werte an als die Protonen der entsprechenden Steifigkeit. Ob es sich hierbei um einen nicht verstandenen Instrumenteneffekt oder um ein reales Ergebnis handelt, kann nur nach gründlichem Studium der entsprechenden Ereignisse entschieden und soll

hier nicht weiter verfolgt werden. Dieses Ergebnis ist zumindest mit einfachen theoretischen Modellen der Pitchwinkelstreuung, wie z. B. dem Standardmodell, nicht zu verstehen.

Vergleicht man abschließend das Verhältnis der radialen mittleren freien Weglängen der Elektronen des E03-Kanals und der Protonen des P13-Kanals miteinander, so zeigt sich, daß die radialen mittleren freien Weglängen der Elektronen systematisch unter denen der Protonen liegen bzw. gleich denen der Protonen sind. Als arithmetisches Mittel der Verhältnisse $\lambda_{P13}/\lambda_{E03}$ der mittleren freien Weglängen der Elektronen und Protonen ergibt sich für acht Ereignisse, bei denen eine gleichzeitige Bestimmung der radialen mittleren freien Weglängen möglich ist, ein Wert von 1.7 ± 0.6 . Die Verhältnisse $\lambda_{P13}/\lambda_{E03}$ streuen dabei in einem Bereich von 1 bis 3.2. Trotz der großen Schwankungsbreite der radialen mittleren freien Weglängen von Ereignis zu Ereignis bleibt das Verhältnis $\lambda_{P13}/\lambda_{E03}$ somit nahezu konstant. Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit dem Wert von $\lambda_{P13}/\lambda_{E03} = 1.6 \pm 0.9$ von KALLENRODE [1993], gemittelt über 21 Ereignisse, und $\lambda_{P13}/\lambda_{E03} = 1.8$ von BIEBER ET AL. [1994], das aus einer geometrischen Mittelung der Verhältnisse $\lambda_{E03}/\lambda_{P13}$ von 11 Ereignissen hervorgeht. Schon MA SUNG AND EARL [1978] haben beim Vergleich von mittleren freien Weglängen von Protonen im Energiebereich von 4 bis 80 MeV mit denen von Elektronen im Energiebereich von 0.5 bis 1.1 MeV und 3 bis 12 MeV um den Faktor zwei bis drei kleinere mittlere freie Weglängen der Elektronen festgestellt.

Dieses Ergebnis ist von großer Bedeutung für die theoretischen Modelle der Pitchwinkelstreuung, wie sowohl KALLENRODE [1993] als auch BIEBER ET AL. [1994] betonen, da es sich nicht mit dem Standardmodell erklären läßt. Das Standardmodell fordert folgende Abhängigkeit der mittleren freien Weglänge von der Steifigkeit P für $q < 2$

$$\lambda_{\parallel} \propto P^{2-q} \quad (6.6)$$

wobei q nach Gleichung (2.16) durch das Potenzgesetz der Spektraldichte der Magnetfeldfluktuationen festgelegt ist. Für ein typisches Spektrum von $q = 5/3$ (Kolmogorov-Spektrum) ergibt sich somit eine Abhängigkeit von der Steifigkeit mit

$$\lambda_{\parallel} \propto P^{1/3} \quad (6.7)$$

d. h. für die hier besprochenen Steifigkeiten des E03-Kanals von 1.4 MV und des P13-Kanals von 187 MV ein Verhältnis $\lambda_{P13}/\lambda_{E03}$ von 5. Dies steht offensichtlich im Widerspruch zu dem gemessenen Wert von $\lambda_{P13}/\lambda_{E03} = 1.7 \pm 0.6$. Welche Modifikationen an der Theorie vorgenommen werden müssen, um diese Beobachtung zu erklären, wird ausführlich von BIEBER ET AL. [1994] diskutiert.

6.3 Die Bestimmung der \hat{q} - und $\hat{\sigma}$ -Parameter

Bevor im Detail auf die Bestimmungsmethode der \hat{q} - und $\hat{\sigma}$ -Parameter eingegangen wird, erfolgt eine Bestandsaufnahme der Meßgrößen und der Lösungen der Transportgleichung (2.58), welche zur Verfügung stehen.

Unter Anwendung des steady-state-Theorems aus Abschnitt 2.2.3 ist es möglich, aus den gemessenen Zeitprofilen der Legendre-Koeffizienten g_n mit $n = 0, 1, 2, 3, 4$ eines solaren Ereignisses die stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3, 4$ bzw. die entsprechenden M_{ns} -Koeffizienten zu berechnen. Dies hat den Vorteil, daß das Problem um die Dimension der Zeit reduziert wird, aber auch den Nachteil, daß die Ausbreitungsparameter λ_{\parallel}/L , \hat{q} , H und

$\hat{\sigma}$ nicht als Zeitreihen bestimmt werden können (siehe Abschnitt 6.1). Ein weiterer Vorteil ist, daß durch die Integration über die Zeit der statistische Meßfehler deutlich reduziert wird. Dennoch können die stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n > 1$ für kleine Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ nicht hinreichend genau bestimmt werden, da, wie bereits in Abschnitt 2.2.4 erwähnt wurde, die stationären PWVs im Grenzübergang $\lim_{L \rightarrow \infty}$ isotrop werden und damit die Anisotropien ξ_{ns} mit $n \geq 1$ identisch verschwinden.⁵

Aus diesem Grund konnten in dieser Arbeit die \hat{q} - und $\hat{\sigma}$ -Parameter nur für die solaren Ereignisse bestimmt werden, die eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r > 0.1$ AU aufweisen. Dadurch wird eine systematische Auswahl der solaren Ereignisse getroffen, die einer Auswertung der stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n > 1$ zugänglich sind. Allerdings haben die großen mittleren freien Weglängen auch den Vorzug, daß die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration zu vernachlässigen sind.

Von der mathematischen Seite her ist man auf die analytischen Lösungen der stationären Transportgleichung für konstante Ausbreitungsbedingungen (5.7) beschränkt (siehe Abschnitt 5.1), um die M_{ns} -Koeffizienten mit $n > 1$ zu berechnen. Welchen Näherungscharakter diese Lösungen für räumlich variable Ausbreitungsbedingungen haben, wurde ausführlich in Abschnitt 5.3 diskutiert. Möchte man eine Näherung vermeiden und auch den g_{0s} -Koeffizienten in Form der stationären Anisotropien ξ_{ns} einer Auswertung zugänglich machen, so müssen die Lösungen der vollständigen stationären Transportgleichung auf numerischem Wege berechnet werden (siehe Abschnitt 3.3). Da für die Bestimmung der Ausbreitungsparameter $\lambda_{||}/L$, \hat{q} , H und $\hat{\sigma}$ bei unterschiedlichen Sonnenwindgeschwindigkeiten v_{sw} eine große Anzahl von stationären Lösungen benötigt wird, ist es von entscheidender Bedeutung, daß das Differenzenverfahren schnell genug ist, um diese numerischen Lösungen mit der zur Verfügung stehenden Rechenkapazität zu berechnen. Die Tatsache, daß das in Kapitel 3 vorgestellte Differenzenverfahren um zwei Größenordnungen schneller ist als das vergleichbare Verfahren von RUFFOLO [1991] (siehe Abschnitt 3.4.3), ist somit kein technisches Detail, sondern entscheidet darüber, ob die hier vorgestellte Auswertungsmethode mit den Lösungen der vollständigen Transportgleichung durchgeführt werden kann oder nicht.

Die stationären Lösungen für bestimmte Ausbreitungsbedingungen müssen jeweils nur einmal berechnet werden, so daß die Funktionswerte anschließend tabelliert in Form von Computerdateien vorliegen. Nachdem so erst einmal ein Datensatz von stationären Lösungen für unterschiedliche Ausbreitungsbedingungen angelegt worden ist, erweist sich die Tatsache, daß analytische Lösungen nicht bekannt sind, für die Auswertung der solaren Ereignisse als ein nicht schwerwiegender Nachteil.

Als nächstes geht es darum, das in Abschnitt 5.3 erworbene Wissen über die Abhängigkeit der Legendre-Koeffizienten g_{ns} der Lösungen der genäherten stationären Transportgleichung von den Ausbreitungsbedingungen in eine Methode zur Bestimmung der Ausbreitungsparameter umzusetzen. Die in Abschnitt 5.3.2 diskutierten Abhängigkeiten (siehe Tabelle 5.1) gelten für Verhältnisse $\lambda_{||}/L \lesssim 1$. Für große Verhältnisse $\lambda_{||}/L > 1$ zeigt sich hingegen eine Abhängigkeit jedes Legendre-Koeffizienten von allen Ausbreitungsparametern. Demnach ist es für die Verhältnisse $\lambda_{||}/L \lesssim 1$ möglich, das Problem der Bestimmung der Ausbreitungsparameter aus den stationären Anisotropien ξ_{ns} zu separieren. Dadurch ist eine sukzessive Bestimmung der einzelnen Parameter möglich.

In Abschnitt 6.2 ist, ausgehend von der stationären Anisotropie ξ_{1s} , die radiale mittlere

⁵Es handelt sich somit um das Problem, daß der Signal-Rausch-Abstand aufgrund des verschwindenden Signals ungünstig wird, und nicht darum, daß der Rauschpegel zunimmt.

freie Weglänge bestimmt worden; damit ist bereits der räumliche Verlauf des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ festgelegt, da der räumliche Verlauf der Fokussierungslänge $L(s)$ durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes bestimmt ist (siehe Gleichung (2.11)). Danach bietet es sich an, den \hat{q} -Parameter aus der stationären Anisotropie ξ_{3s} zu bestimmen. Nach Tabelle 5.1 ist der g_{3s} -Koeffizient und damit auch die stationäre Anisotropie ξ_{3s} im wesentlichen vom \hat{q} -Parameter und dem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ abhängig. Der $\hat{\sigma}$ -Parameter kann dann aus der stationären Anisotropie ξ_{2s} bestimmt werden, da der g_{2s} -Koeffizient nach Tabelle 5.1 eine Funktion von den Größen $\lambda_{||}/L$, \hat{q} und $\hat{\sigma}$ ist. Ist es möglich, die stationäre Anisotropie ξ_{4s} zuverlässig zu messen, dann kann nach Abschnitt 5.3.3 sogar noch zwischen verschiedenen (\hat{q}, H) -Paaren unterschieden werden, wie sich aus der Abbildung 5.9 ergibt.

Wie bereits in Abschnitt 6.1 im Zusammenhang mit dem M_4 -Koeffizienten bemerkt wurde, ist eine Rekonstruktion des g_4 -Koeffizienten aus den acht Sektormittelwerten nicht auf direktem Wege möglich, sondern nur aufgrund von bestimmten Annahmen über die Symmetrieeigenschaft der PWV. Eine kontinuierliche Berechnung des g_4 -Koeffizienten ist nicht möglich, was sich besonders im Zusammenhang mit der Summation über der Zeit zur Bestimmung des g_{4s} -Koeffizienten nachteilig auswirkt. Da der g_4 -Koeffizient schon von der Zählstatistik her die größte Unsicherheit aufweist und dann noch die Unsicherheit durch die Annahmen bei der Rekonstruktion des g_4 -Koeffizienten hinzukommt, sind die g_4 -Koeffizienten, die berechnet werden können, mit einer großen Unsicherheit behaftet. Diesen stehen aus der Transportgleichung berechnete Werte für den g_4 -Koeffizienten gegenüber, die vom Betrag her sehr klein sind. Von einer Auswertung des g_4 -Koeffizienten und damit der stationären Anisotropie ξ_{4s} wird deshalb abgesehen. Statt dessen wird repräsentativ für die Formen des PWSK, welche mit den verbleibenden stationären Anisotropien ξ_{2s} und ξ_{3s} nicht unterschieden werden können, der PWSK des Standardmodells mit $H = 0$ verwendet.

Anhand der Abbildung 6.5 wird nun eine graphische Bestimmungsmethode erläutert, mit der unabhängig davon, ob das lokale Verhältnis $\lambda_{||}/L$ klein oder groß ist, die radiale mittlere freie Weglänge λ_r und die die Form des PWSK kennzeichnenden Parameter \hat{q} und $\hat{\sigma}$ bestimmt werden können.

In der linken Hälfte der Abbildung 6.5 sind die stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ als Funktionen der Parameter λ_r und \hat{q} aufgetragen. Es handelt sich dabei um die Funktionsverläufe, die sich für einen bestimmten radialen Abstand von der Sonne ergeben. Im allgemeinen kann dieser radiale Abstand entsprechend den Bahnen der HELIOS-Satelliten zwischen 0.3 AU und 1 AU gewählt werden, wodurch sich gemäß der in Dateien abgespeicherten Lösungen der vollständigen stationären Transportgleichung unterschiedliche Funktionsverläufe ergeben. Für die Messung eines solaren Ereignisses bei einem bestimmten radialen Abstand liegen nach der Anwendung des steady-state-Theorems die stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ vor. Diese gemessenen stationären Anisotropien ξ_{ns} müssen mit den aus der numerischen Lösung stammenden stationären Anisotropien $\xi_{ns}(\lambda_r, \hat{q}, \hat{\sigma})$ für eine bestimmte Kombination der Parameter λ_r , \hat{q} und $\hat{\sigma}$ übereinstimmen. Es gilt daher, ein Verfahren anzugeben, das es ermöglicht, die Parameter λ_r , \hat{q} und $\hat{\sigma}$ zu bestimmen, indem man die gemessenen stationären Anisotropien ξ_{ns} mit den aus der Lösung der Transportgleichung stammenden Anisotropien ξ_{ns} vergleicht und zur Deckung bringt. Da es sich bei den stationären Anisotropien $\xi_{ns} = g_{ns}/g_{0s}$ mit $n \geq 1$ um die auf die omnidirektionale Intensität g_0 normierten Legendre-Koeffizienten handelt, kann, wie schon beim steady-state-Theorem, die Orthogonalität der Legendre-Polynome genutzt werden:

Es werden für jede stationäre Anisotropie ξ_{ns} im linken Teil der Abbildung jeweils einzeln

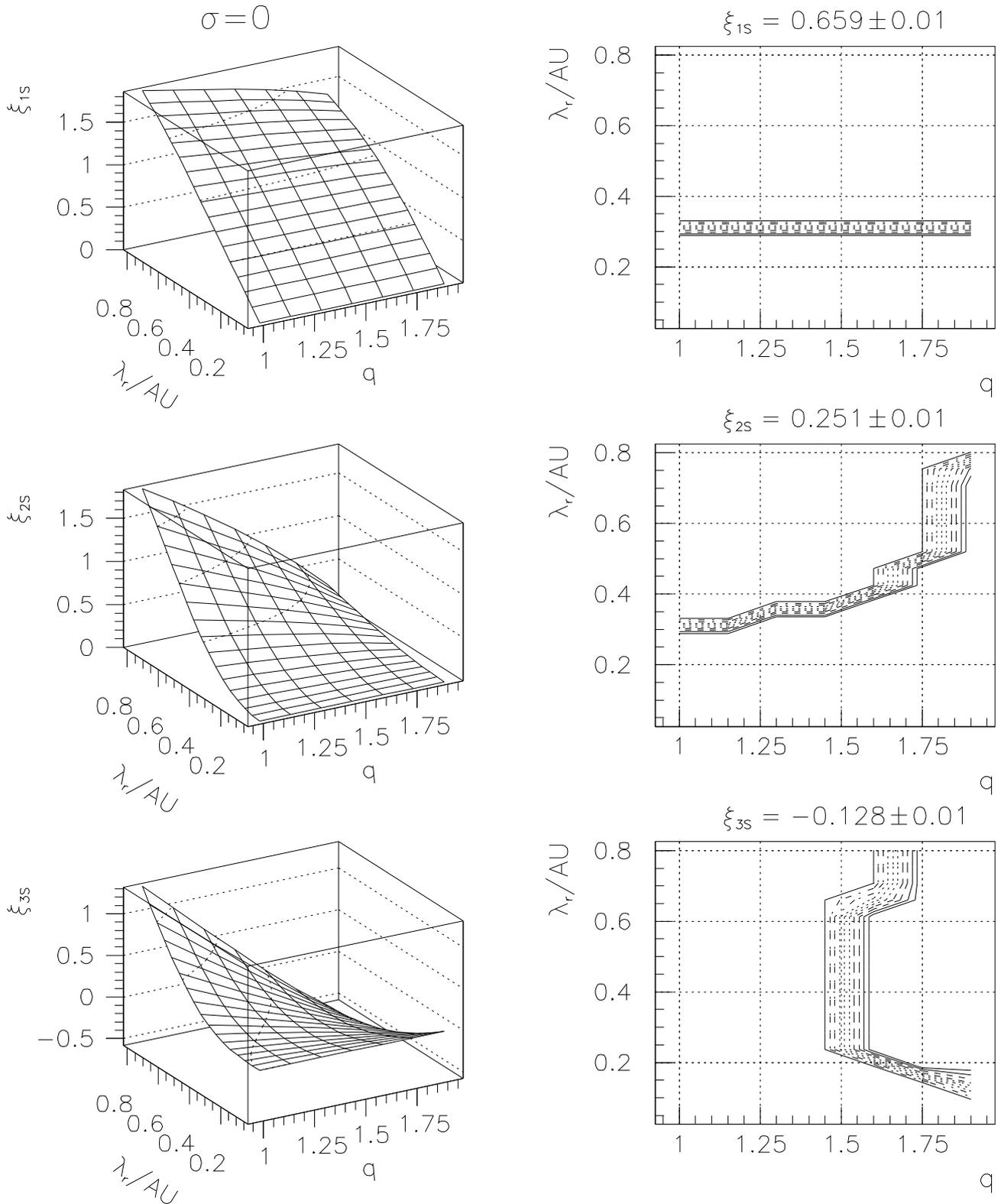


Abbildung 6.5: Die stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ wurden bei einem radialen Abstand von $r = 0.495$ AU und einer Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 400$ km/s für einen PWSK mit den Parametern $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ berechnet. Im linken Teil sind die stationären Anisotropien ξ_{ns} als Funktion von der mittleren freien Weglänge λ_r und dem \hat{q} -Parameter dargestellt; im rechten Teil sind die Höhenlinien dieser Funktionen für die angegebenen gemessenen stationären Anisotropien ξ_{ns} aufgetragen.

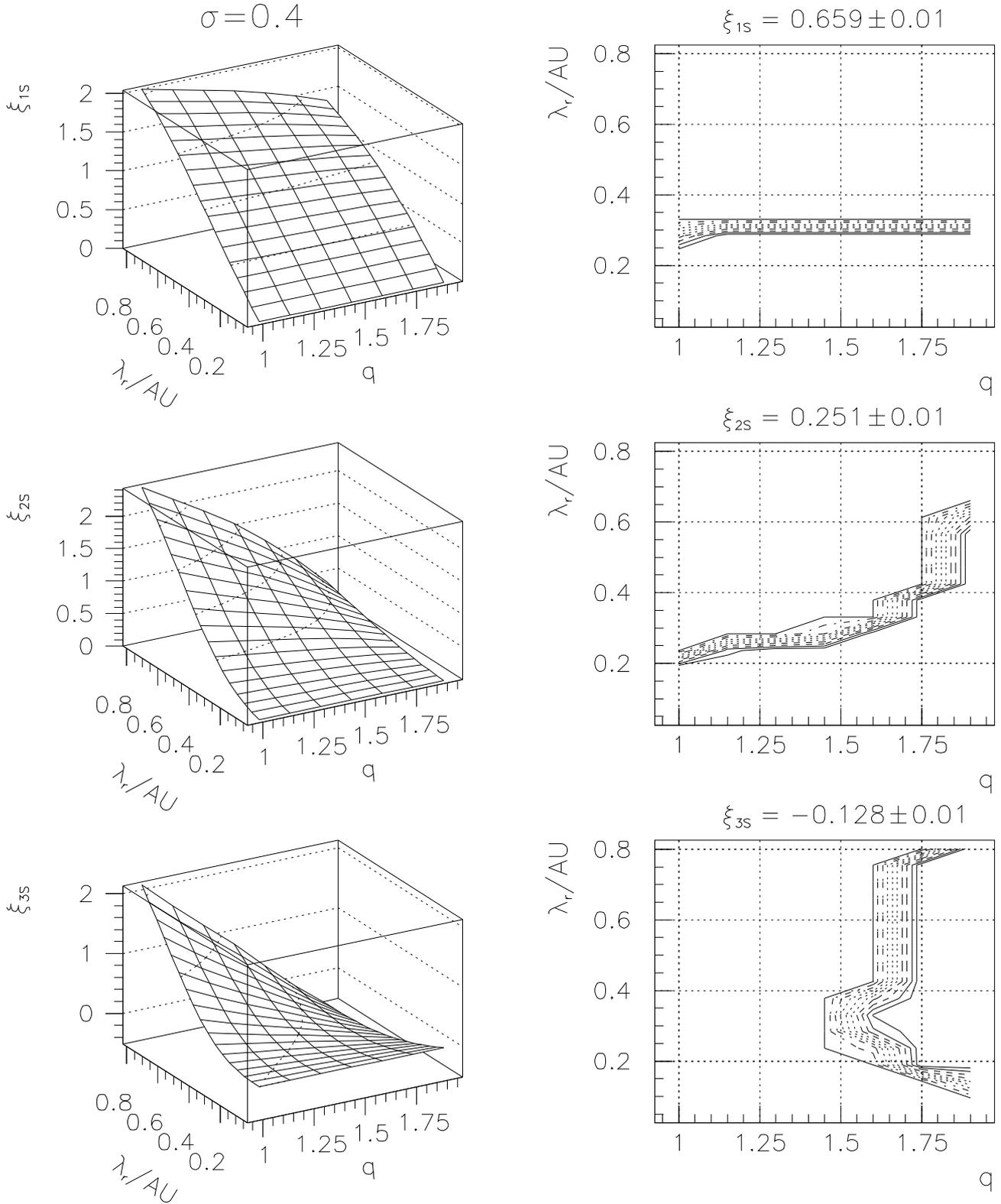


Abbildung 6.6: Die stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ wurden bei einem radialen Abstand von $r = 0.495$ AU und einer Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 400$ km/s für einen PWSK mit den Parametern $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0.4$ berechnet. Im linken Teil sind die stationären Anisotropien ξ_{ns} als Funktion von der mittleren freien Weglänge λ_r und dem \hat{q} -Parameter dargestellt; im rechten Teil sind die Höhenlinien dieser Funktionen für die angegebenen gemessenen stationären Anisotropien ξ_{ns} aufgetragen.

die Kombinationen von λ_r und \hat{q} herausgesucht, die mit dem jeweils gemessenen Wert der stationären Anisotropie ξ_{ns} übereinstimmen. Die sich für jede stationäre Anisotropie ergebenden (λ_r, \hat{q}) -Paare können dann in der λ_r - \hat{q} -Ebene eingezeichnet werden. Da es sich bei den gemessenen Anisotropien ξ_{ns} um Größen handelt, die mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind, ist es ratsam, auch die (λ_r, \hat{q}) -Paare, zu denen stationäre Anisotropien ξ_{ns} gehören, die nicht exakt mit dem Meßwert übereinstimmen, in die Betrachtung mitaufzunehmen. Man kann dann ermesen, ob man sich in einem scharf begrenzten (λ_r, \hat{q}) -Parameterbereich befindet, der mit den gemessenen stationären Anisotropien ξ_{ns} in Übereinstimmung zu bringen ist. Als Ergebnis dieses Vergleichs zwischen den aus dem Transportmodell vorhergesagten theoretischen und den gemessenen stationären Anisotropien ξ_{ns} erhält man beispielsweise die in dem rechten Teil der Abbildung eingezeichneten Flächen in der λ_r - \hat{q} -Ebene. Diese Flächen können auch als Höhenlinien der zweidimensionalen Anisotropiefunktionen $\xi(\lambda_r, \hat{q})$ im linken Teil der Abbildung interpretiert werden, und zwar in dem Bereich, der durch die gemessenen stationären Anisotropien und die vorgegebene Unsicherheit begrenzt ist. Die für den Vergleich mit den theoretischen stationären Anisotropien ξ_{ns} im linken Teil der Abbildung 6.5 verwendeten gemessenen Anisotropien ξ_{ns} sind jeweils über den im rechten Teil der Abbildung 6.5 gezeigten λ_r - \hat{q} -Ebenen aufgeführt. Die angegebene Unsicherheit von ± 0.01 entspricht dabei nicht der tatsächlichen Unsicherheit der Meßwerte, sondern dient dem oben genannten Zweck, die Signifikanz der (λ_r, \hat{q}) -Paare beurteilen zu können.

Bei den in Abbildung 6.5 verwendeten stationären Anisotropien handelt es sich um Protonen des P4-Kanals des solaren Ereignisses vom 28. März (doy 88) 1976 auf HELIOS 2, das bei einem radialen Abstand von $r = 0.495$ AU bei einer mittleren Sonnenwindgeschwindigkeit von $v_{sw} = 350$ km/s gemessen wurde. Da die Abbildung 6.5 außerdem dazu dienen soll, den $\hat{\sigma}$ -Parameter zu bestimmen, sind die aus der numerischen Lösung stammenden stationären Anisotropien ξ_{ns} im linken Teil der Abbildung mit einem $\hat{\sigma}$ -Wert von $\hat{\sigma} = 0$ berechnet worden. Zur Bestimmung des $\hat{\sigma}$ -Parameters sind demnach verschiedene Graphiken der Art, wie in Abbildung 6.5 gezeigt, für unterschiedliche $\hat{\sigma}$ -Werte anzufertigen, da es sich bei dem $\hat{\sigma}$ -Parameter um einen weiteren Freiheitsgrad handelt. Man kann sich dies auch so vorstellen, daß man die Flächen in den λ_r - \hat{q} -Ebenen für die einzelnen stationären Anisotropien ξ_{ns} , welche im rechten Teil der Abbildung gezeigt werden, um eine $\hat{\sigma}$ -Achse zu erweitern hat, die senkrecht auf den λ_r - \hat{q} -Ebenen steht. Es werden somit die räumlichen $(\lambda_r, \hat{q}, \hat{\sigma})$ -Bereiche gesucht, für die alle stationären Anisotropien ξ_{ns} zur Übereinstimmung gebracht werden können.

Vergleicht man nun die eingezeichneten Bereiche in den λ_r - \hat{q} -Ebenen der einzelnen Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ miteinander und konzentriert sich auf den zentralen Bereich der Höhenlinien, so zeigt sich, daß in der Abbildung 6.5 kein Überdeckungsbereich der drei Flächen zu ermitteln ist. Man könnte durchaus eine Überdeckung der Höhenlinien für die stationären Anisotropien ξ_{1s} und ξ_{3s} ermitteln; problematisch wird es jedoch, an derselben Stelle die Flächen der stationären Anisotropien ξ_{1s} und ξ_{2s} zur Deckung zu bringen. Der gemessene ξ_{2s} -Wert müßte vom Betrag her niedriger sein, um bei einem $\hat{\sigma}$ -Wert von $\hat{\sigma} = 0$ Höhenlinien in der λ_r - \hat{q} -Ebene zu erzeugen, die mit den Höhenlinien der stationären Anisotropie ξ_{1s} zur Deckung gebracht werden könnten. Variiert man nun den $\hat{\sigma}$ -Parameter und wählt z. B. einen $\hat{\sigma}$ -Wert von $\hat{\sigma} = 0.4$, so ergeben sich die in Abbildung 6.6 gezeigten Höhenlinien der stationären Anisotropien ξ_{ns} , für die es sehr wohl einen Bereich von (λ_r, \hat{q}) -Werten gibt, die zur Deckung aller drei Höhenlinienscharen führen: $\lambda_r = 0.30$ AU, $\hat{q} = 1.55$. Mit dieser graphischen Bestimmungsmethode ist es möglich, die Parameter λ_r , \hat{q} und $\hat{\sigma}$ festzulegen, falls die radialen mittleren freien Weglängen hinreichend groß sind. Für kleine radiale mittlere freie

Weglängen ergeben sich hingegen unabhängig von der Form des PWSK sehr kleine stationäre Anisotropien ξ_{ns} , wie man anhand der numerisch berechneten Anisotropien ξ_{ns} im linken Teil der Abbildungen 6.5 und 6.6 erkennen kann.

Der Vorzug gegenüber Methoden, die mit der diffusiven Näherung arbeiten, liegt in der Tatsache, daß es sich bei dem hier vorgestellten graphischen Verfahren nicht um eine Näherung handelt! Diese Methode erfordert zwar zunächst einen großen Aufwand, um die stationären Lösungen für unterschiedliche Ausbreitungsparameter zu ermitteln, hat aber den Vorteil, daß dies nur ein einziges Mal zwecks Tabellierung der stationären Lösungen in Computerdateien durchzuführen ist. Ist dies geschehen, so kann man ohne große Erfahrung die Parameter λ_r , \hat{q} und $\hat{\sigma}$ aus den stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ mit Hilfe des oben beschriebenen graphischen Verfahrens bestimmen.

Wertet man hingegen die entsprechenden M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3$ aus, so können nur die Ausbreitungsparameter $\lambda_{||}$ und \hat{q} bestimmt werden. Dabei muß für den $\hat{\sigma}$ -Parameter ein Wert angenommen werden, der unmittelbar die zu bestimmende mittlere freie Weglänge $\lambda_{||}$ beeinflusst. Würde man beispielsweise unter der Annahme eines identisch verschwindenden $\hat{\sigma}$ -Wertes, d. h. $\hat{\sigma} = 0$, aus den gemessenen M_{ns} -Koeffizienten mit $n = 2, 3$ der Protonen des P4-Kanals des solaren Ereignisses vom 28. März 1976 die Parameter $\lambda_{||}$ und \hat{q} bestimmen, so ergäbe sich eine radiale mittlere freie Weglänge von $\lambda_r = 0.5$ AU und ein \hat{q} -Wert von $\hat{q} = 1.6$. Die auf diese Weise bestimmte radiale mittlere freie Weglänge ist damit deutlich größer als der aus den stationären Anisotropien ξ_{1s} bestimmte Wert von $\lambda_r = 0.25$ AU. Dieser Umstand ist nur darauf zurückzuführen, daß eine falsche Annahme über den $\hat{\sigma}$ -Parameter gemacht wurde. Dies ist bereits daran abzulesen, daß die Höhenlinien der einzelnen stationären Anisotropien in der λ_r - \hat{q} -Ebene nicht zur Deckung gebracht werden können, wie dem rechten Teil der Abbildung 6.5 zu entnehmen ist. Nimmt man hingegen einen $\hat{\sigma}$ -Wert von $\hat{\sigma} = 0.4$ an, so deckt sich der aus den M_{ns} -Koeffizienten bestimmte Wert für $\lambda_{||}$ bzw. nach Gleichung (2.25) der Wert für λ_r mit dem aus den stationären Anisotropien ξ_{ns} bestimmten Wert.

6.3.1 Der \hat{q} -Parameter

Die mit der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen graphischen Methode bestimmten \hat{q} -Werte der einzelnen solaren Ereignisse sind in der Abbildung 6.7 getrennt nach Elektronen (oberer Teil), Protonen (mittlerer Teil) und α -Teilchen (unterer Teil) über dem radialen Abstand aufgetragen. Für die höchsten Energiekanäle der Protonen und α -Teilchen, d. h. die Kanäle P27 und A13, konnte wegen eines zu großen statistischen Fehlers keine Auswertung vorgenommen werden. Für die verbleibenden Datenpunkte wurde ein systematischer Fehler von ± 0.1 angegeben, der sich aus der graphischen Bestimmungsmethode ergibt. Es handelt sich dabei um eine untere Grenze des Gesamtfehlers, da die in Abschnitt 6.2 besprochenen Unsicherheiten durch interplanetare Stoßwellen, Datenlücken und Übersprechen zusätzlich zum Gesamtfehler beitragen.

Eine radiale Abhängigkeit des \hat{q} -Parameters ist der Abbildung 6.7 nicht zu entnehmen. Der in Abschnitt 2.1.2 gewählte Produktansatz, der den PWSK in einen von der Stärke der Streuung abhängigen räumlichen Anteil und einen von der Form des PWSK abhängigen konstanten Anteil aufspaltet, hat demnach nicht nur auf der lokalen, sondern auch auf der globalen Skala Gültigkeit. Eine deutliche Abhängigkeit des \hat{q} -Parameters innerhalb einer Teilchensorte von den Energiekanälen bzw. deren Steifigkeiten ist innerhalb der Fehlerbalken nicht zu beobachten.

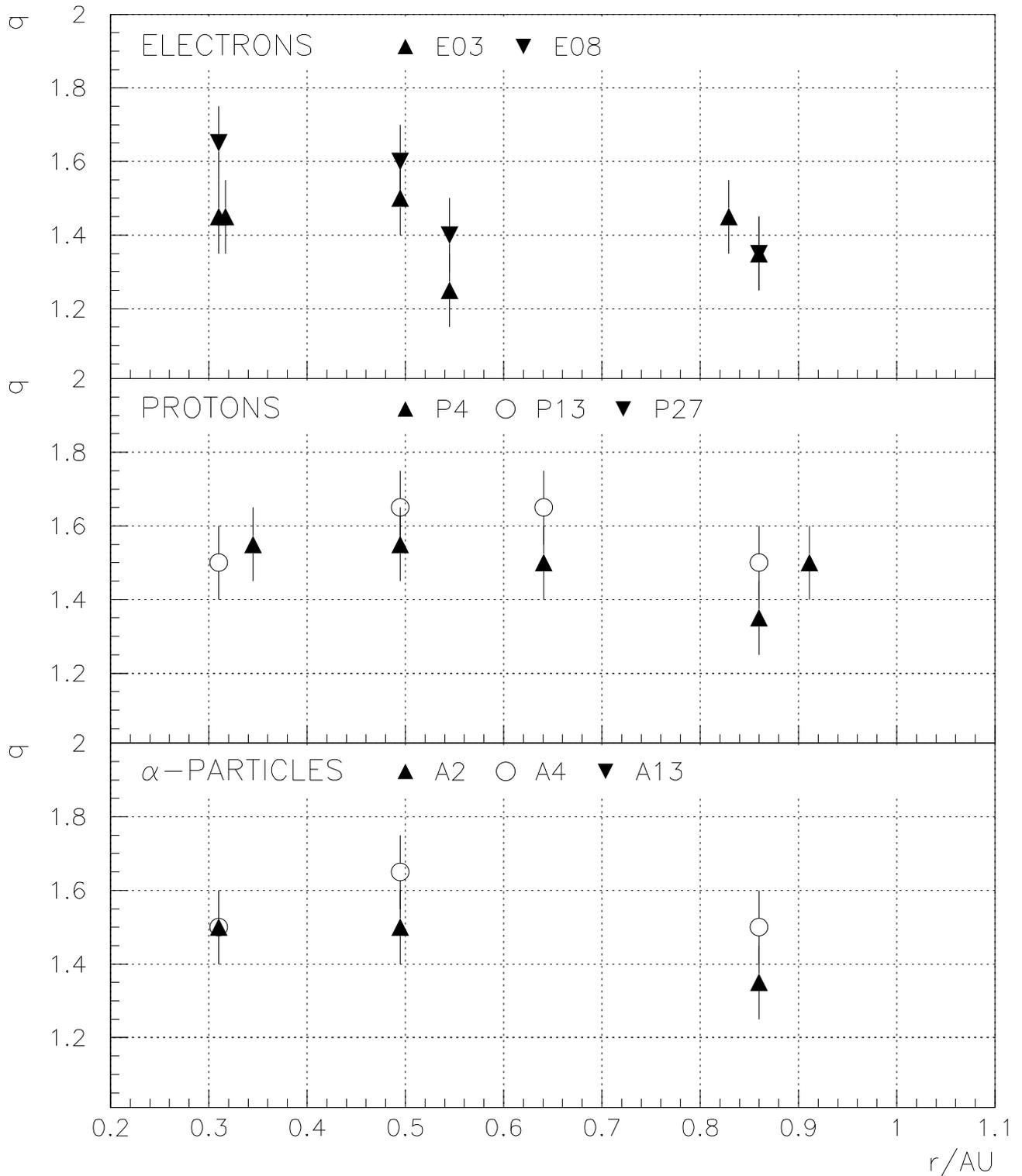


Abbildung 6.7: Die aus den stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ bestimmten \hat{q} -Werte des PWSK sind für Elektronen (oberer Teil), Protonen (mittlerer Teil) und α -Teilchen (unterer Teil) über dem radialen Abstand aufgetragen. Die Energiekanäle des E6-Experiments sind durch verschiedenen Symbole gekennzeichnet. Die eingezeichneten Fehlerbalken ergeben sich aus dem systematischen Fehler der graphischen Bestimmungsmethode (siehe Text).

Für die Protonen- und α -Teilchen-Kanäle ist jedoch noch auf einen geringfügigen meßtechnischen Effekt hinzuweisen, der sich aufgrund der Breite des Energiefensters in den einzelnen Energiekanälen (siehe Tabelle 1.1) ergibt, da mit den unterschiedlichen Energien auch unterschiedliche Geschwindigkeiten verbunden sind. Werden diese Teilchen nun gleichzeitig in den Sektormittelwerten eines Energiekanals nachgewiesen, so befinden sich die dazugehörigen PWVs in "Entwicklungsstadien", die zeitlich etwas gegeneinander versetzt sind. Das kann bedeuten, daß die Anisotropie für die schnelleren Teilchen bereits wieder am Abklingen ist, während die langsameren Teilchen gerade erst das Maximum der Anisotropie erreicht haben. Insgesamt führt dieser Effekt daher zu einer effektiv geringeren Anisotropie, welche aus den Sektormittelwerten rekonstruiert wird. SCHLÜTER [1985], S. 27ff., weist darauf hin, daß der Effekt im allgemeinen zu vernachlässigen sei. Dies ist jedoch mit Einschränkungen zu versehen: Beträgt die radiale mittlere freie Weglänge z. B. $\lambda_r = 0.4$ AU und hat der PWSK ein ausgeprägtes "resonance gap", so kommt es in der Anisotropie dritter Ordnung ξ_3 , die für die Bestimmung des \hat{q} -Parameters entscheidend ist, zu einem Vorzeichenwechsel, wie man der Abbildung 4.8 entnehmen kann. Haben nun die in einem Energiekanal nachgewiesenen Teilchen unterschiedliche Geschwindigkeiten, dann wird das Minimum der schnellen Teilchen durch den positiven Peak der langsameren Teilchen "aufgefüllt". Der aus den Sektormittelwerten rekonstruierte Wert für die Anisotropie ξ_3 ist demnach systematisch zu gering, wodurch sich auch für die \hat{q} -Werte systematisch zu geringe Werte ergeben. Wie oben erwähnt, dürfte es sich hierbei aber nur um einen geringfügigen Effekt handeln, der sich nur dann bemerkbar macht, wenn sich die PWVs zeitlich stark ändern, d. h. bei großen Verhältnissen $\lambda_{||}/L$ und kurzen zeitlichen Injektionen.

Berechnet man die Mittelwerte des \hat{q} -Parameters für die in Abbildung 6.7 eingetragenen Werte, so erhält man für die Elektronen $\hat{q}_E = 1.45 \pm 0.12$, für die Protonen $\hat{q}_P = 1.53 \pm 0.09$ und für die α -Teilchen $\hat{q}_A = 1.50 \pm 0.10$. Der \hat{q} -Wert der Elektronen ist damit etwas kleiner als der \hat{q} -Wert der Protonen, während sich die \hat{q} -Werte der Protonen und α -Teilchen nur geringfügig voneinander unterscheiden. In Anbetracht der sich stark unterscheidenden Steifigkeiten der Elektronen und Protonen ist dies ein bemerkenswertes Ergebnis.

6.3.1.1 Vergleich mit publizierten Ergebnissen

In der Literatur liegen für bestimmte solare Ereignisse Werte für den \hat{q} -Parameter vor. So ist z. B. das Ereignis vom 28. März (doy 88) 1976 auf HELIOS 2 von BIEBER ET AL. [1980] und NG ET AL. [1983, 1989] untersucht worden. BIEBER ET AL. [1980] verwenden dafür die von BIEBER [1977] weiterentwickelte Methode der Fokussierungs-Eigenfunktionen (siehe Abschnitt 2.3), die aber auf den unrealistischen Fall eines konstanten Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ festgelegt ist. Daraus ergibt sich unter der Annahme des PWSK aus dem Standardmodell für den E03-Kanal ein Wert von $\hat{q} = 1.20 \pm 0.05$ und für den P4-Kanal von $\hat{q} = 1.26 \pm 0.07$.

NG ET AL. [1983, 1989] verwenden hingegen das Differenzenverfahren von NG AND WONG [1979] und WONG [1982], so daß ihnen numerische Lösungen zur Verfügung stehen, die sie an die gemessenen PWVs anpassen können. Der mit Hilfe dieser Anpassung ermittelte Wert beträgt für den E03- und den P4-Kanal $\hat{q} = 4 \pm 1$ und $H = 0.02$. Dabei ist zu bemerken, daß sie ein relativ grobes μ -Raster von $I = 20$ Gitterpunkten verwenden und das von ihnen benutzte Differenzenverfahren einiger Verbesserungen entbehrt, die in Abschnitt 3.4 aufgeführt sind. Ein besonderes Problem dabei sind kleine Funktionswerte des normierten PWSK $\bar{\kappa}(\mu)$, die nach der Gleichung von WONG [1982], S. 34, zu negativen a_i -Werten in der

Gleichung (3.47) führen können. NG ET AL. [1983, 1989] dürften, um dies zu verhindern, eher PWSKs mit großen \hat{q} -Werten verwendet haben. Das Differenzenverfahren ist nämlich für PWSKs mit negativen Funktionswerten nicht stabil, da es in diesem Fall keine Lösung der Transportgleichung (2.58) gibt.

Der in dieser Arbeit ermittelte Wert für das Ereignis vom 28. März (doy 88) 1976 beträgt unter Verwendung des PWSK nach dem Standardmodell für den E03-Kanal $\hat{q} = 1.5 \pm 0.1$ und für den P4-Kanal $\hat{q} = 1.55 \pm 0.1$.

Desweiteren ermitteln BEECK AND WIBBERENZ [1986] aus den M_n -Koeffizienten mit $n = 2, 3, 4$ für das Ereignis vom 8. April (doy 98) 1978 für die Elektronen des E03-Kanals die Werte $\hat{q} = 2.3 \pm 0.3$ und $H = 0.07 \pm 0.04$ und für die Protonen des P4-Kanals die Werte $\hat{q} = 2.2 \pm 0.2$ und $H = 0.11 \pm 0.04$. Für ein weiteres Ereignis am 11. April (doy 101) 1978 auf HELIOS 2 erhalten sie für die Elektronen des E03-Kanals die Werte $\hat{q} = 1.2 \pm 0.2$ und $H = 0.00$, wobei zu bemerken ist, daß es wegen der kleinen mittleren freien Weglänge dieses solaren Ereignisses äußerst schwierig sein dürfte, die vom Betrag her kleinen M_n -Koeffizienten auszuwerten.

Nach der von BEECK AND WIBBERENZ [1986] vorgestellten Methode berechnen BEECK AND WIBBERENZ [1990] für insgesamt 11 Ereignisse für die Protonenkanäle den \hat{q} -Parameter und erhalten einen Mittelwert von $\hat{q}_P = 1.35 \pm 0.05$. Dabei ist zu bemerken, daß es für zwei Ereignisse nicht gelingt, den \hat{q} -Parameter zu bestimmen und weitere drei Ereignisse einen \hat{q} -Wert von $\hat{q} \leq 1$ aufweisen. Diese kleinen \hat{q} -Werte können sich ergeben, wenn der räumliche Verlauf der Fokussierungslänge von dem Verlauf abweicht, der durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes vorgegeben ist, und wenn sich die Fokussierungslänge auf Skalen der lokalen Umgebung ändert, wie eigene numerische Berechnungen ergeben haben. Solare Ereignisse dieser Art können jedoch in der Regel durch die Plasma- und Magnetfeld-daten identifiziert werden und stehen gemäß der in dieser Arbeit erstellten Auswahlkriterien für eine weitere Auswahl nicht zur Verfügung.

Die größte Unsicherheit bei der Verwendung der Methode von BEECK AND WIBBERENZ [1986] ergibt sich aus dem Umstand, daß die diffusive Näherung mit dem in den Abschnitten 5.3 und 5.4 besprochenen Näherungscharakter verwendet wird. Die Diskrepanz zwischen den Mittelwerten der \hat{q} -Werte von $\hat{q} = 1.53 \pm 0.09$ in dieser Arbeit und $\hat{q}_P = 1.35 \pm 0.05$ nach dem Verfahren von BEECK AND WIBBERENZ [1990] ist damit durchaus zu erklären.

6.3.1.2 Bedeutung für die theoretischen Modelle

Das in Abschnitt 2.1.2 angesprochene Standardmodell von JOKIPII [1966] und HASSELMANN AND WIBBERENZ [1968] ist bis in die jüngste Vergangenheit weiterentwickelt worden. Kürzlich erschienene Zusammenfassungen über die wesentlichen Verbesserungen finden sich in KUNOW ET AL. [1991], WANNER [1993], und DRÖGE [1994]. Die Entwicklung der letzten Jahre läßt sich kurz anhand folgender Begriffe skizzieren:

Die Forderung nach der Slab-Geometrie, d. h. daß die Wellenvektoren ausschließlich parallel und antiparallel zum mittleren Magnetfeld liegen müssen, ist auf weitere Geometrien erweitert worden. So gibt es das Modell der isotropen Verteilung der Wellenvektoren [FISK ET AL., 1974; KUNSTMANN, 1979; SMITH, BIEBER, AND MATTHAEUS, 1990] und der schiefwinkligen Alfvén-Wellen [LEE AND VÖLK, 1975; JONES, BIRMINGHAM, AND KAISER, 1978; JAECKEL AND SCHLICKEISER, 1992].

Messungen der Magnetfeldspektren haben ergeben, daß sich diese nicht durch einen einzi-

gen Spektralindex q beschreiben lassen, sondern daß ab einer bestimmten Wellenzahl k_d von ≈ 1 Hz das Spektrum steiler wird und in den Dissipationsbereich übergeht, der durch einen Spektralindex q_d zwischen 2.5 und 3.8 beschrieben wird. Das Standardmodell ist dementsprechend zu erweitern [ACHATZ ET AL., 1993; DRÖGE ET AL., 1993]. Zusätzlich breiten sich die Magnetfeldfluktuationen, die als Alfvén-Wellen angenommen werden, mit der Alfvén-Geschwindigkeit v_A aus, was im Gegensatz zu den als magnetostatisch angenommenen Fluktuationen im Standardmodell steht [SCHLICKEISER, 1988, 1989]. Die Alfvén-Wellen können dabei bezüglich der Sonne ein- und auslaufen, wobei die auslaufenden Wellen in der inneren Heliosphäre bevorzugt sind [MATTHAEUS AND GOLDSTEIN, 1982; TU, MARSCH, AND THIEME, 1989], so daß auch von der Kreuzhelizität (siehe Definition (6.9)) gesprochen wird. Berücksichtigt man, daß sich die Magnetfeldfluktuationen im Dissipationsbereich oberhalb der Wellenzahl k_d aus Zyklotron-, Whistler- und Elektron-Zyklotron-Wellen zusammensetzen, so ergibt sich für diese Wellentypen eine nichtlineare Dispersionsrelation, die sogenannte nicht-Alfvénsche Dispersionsrelation [ACHATZ ET AL., 1993].

Verläßt man die Quasi-Lineare Theorie und läßt auch Magnetfeldfluktuationen zu, die in die Größenordnung des mittleren Magnetfeldes B_0 kommen, so sind nichtlineare Korrekturen vorzunehmen [JONES, BIRMINGHAM, AND KAISER 1978]. Desweiteren können magnetoakustische Wellen, deren Wellenvektoren senkrecht zum mittleren Magnetfeld gerichtet sind und die somit nicht zur Resonanzwechselwirkung beitragen, zur Spiegelung der Teilchen bei $\mu \approx 0$ führen [GOLDSTEIN, 1980; DAVILA AND SCOTT, 1984].

Gibt man die Modellvorstellung auf, daß es sich bei den Magnetfeldfluktuationen um Wellen handelt, die sich entsprechend ihrer Dispersionsrelation ausbreiten, dann kann man die alternative Sichtweise der sogenannten dynamischen Turbulenz annehmen [BIEBER AND MATTHAEUS, 1991], bei der die nichtlineare Kopplung der Turbulenz für unterschiedliche Wellenzahlen zum Energieaustausch zwischen verschiedenen Wellenzahlen führt. Dieses Modell der dynamischen Turbulenz wird von BIEBER, WANNER, AND MATTHAEUS [1996] an eine Geometrie der Wellenvektoren gekoppelt, die aus 20 % Slab- und 80 % quasistatischen, zweidimensionalen Fluktuationen (2-D Turbulenz) besteht, deren Wellenvektoren senkrecht zum mittleren Magnetfeld stehen und so kaum zur Streuung der Teilchen beitragen.

Die oben genannten Modelle beeinflussen sowohl die Breite als auch die Tiefe des PWSK. Häufig unterscheiden sich die vorhergesagten PWSKs aber nur in Details, die man nur in einem halblogarithmischen Maßstab erkennen kann. Betrachtet man die Abbildung 5.9 in Abschnitt 5.3.3, so kann mit den hier zur Verfügung stehenden gemessenen PWVs in Form von Legendre-Koeffizienten g_n mit $n = 0, 1, 2, 3$ nicht einmal das Standardmodell ausgeschlossen werden! Dennoch können die in dieser Arbeit bestimmten \hat{q} -Werte der Elektronen, Protonen und α -Teilchen so interpretiert werden, daß ein ausgeprägtes “resonance gap” vorliegt, d. h. daß die Streuung in der Umgebung von $\mu = 0$ herabgesetzt ist. Betrachtet man die integrale Größe des Diffusionswiderstandes aus Gleichung (3.53), so gibt diese ein Maß für die Ausgeprägtheit des “resonance gap” an, ohne auf dessen exakte Tiefe und Breite einzugehen.

Ein theoretisches Modell, welches nicht mit einem ausgeprägten “resonance gap” verträglich ist und damit ausgeschlossen werden kann, ist das Modell der nichtlinearen Korrekturen für große Verhältnisse

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{\langle (\delta B)^2 \rangle}}{B_0} \quad (6.8)$$

Der Parameter η ist dabei als ein Maß für die relative Stärke der Magnetfeldfluktuationen aufzufassen. Betrachtet man die Abbildung 6.8, so zeigt sich bereits für Verhältnisse von

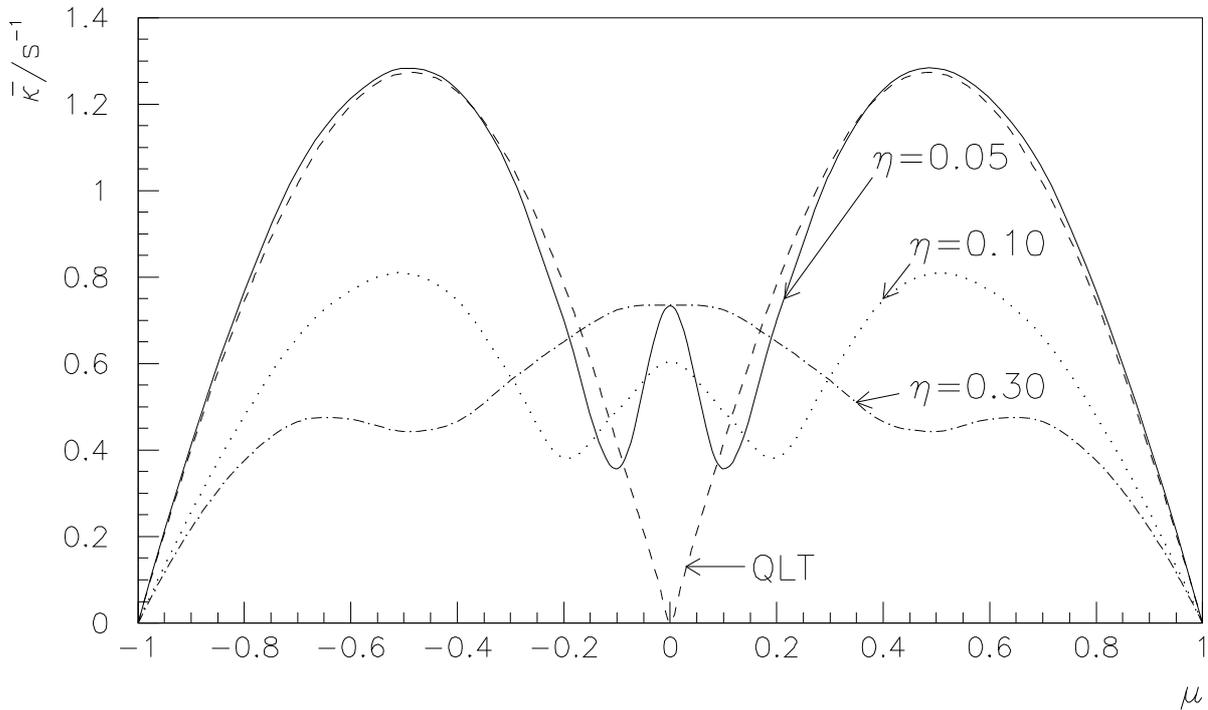


Abbildung 6.8: Der PWSK $\bar{\kappa}(\mu)$ ist für die Slab-Geometrie der Magnetfeldfluktuationen und einen Spektralindex von $q = 2$ dargestellt. Die Form des PWSK nach dem Standardmodell ist entsprechend gekennzeichnet (gestrichelte Kurve). Das “resonance gap” um den Pitchkosinus $\mu = 0$ wird mit zunehmender relativer Stärke der Magnetfeldfluktuationen, ausgedrückt durch den Parameter η , aufgefüllt (Werte nach JONES ET AL. [1978]).

$\eta = 0.1$ eine deutlich “Auffüllung” des “resonance gap”, die zu einem Diffusionswiderstand führt, der nicht mit den aus der Messung bestimmten \hat{q} -Werten in Einklang zu bringen ist.

6.3.2 Der $\hat{\sigma}$ -Parameter

In Abbildung 6.9 ist der $\hat{\sigma}$ -Parameter analog zur Abbildung 6.7 getrennt nach Elektronen (oberer Teil), Protonen (mittlerer Teil) und α -Teilchen (unterer Teil) über dem radialen Abstand aufgetragen. Zur Bestimmung der $\hat{\sigma}$ -Werte wurde, wie schon bei den \hat{q} -Werten, das in Abschnitt 6.3 vorgestellte graphische Verfahren verwendet. Eine Bestimmung der $\hat{\sigma}$ -Werte für die höchsten Energiekanäle der Protonen und α -Teilchen, d. h. für die Kanäle P27 und A13, konnte wegen eines zu großen statistischen Fehlers nicht vorgenommen werden. Für die verbleibenden Datenpunkte wurde ein systematischer Fehler von ± 0.1 angegeben, der sich aus der graphischen Bestimmungsmethode ergibt und bei dem es sich wiederum (siehe Abschnitt 6.3.1) um die untere Grenze des Gesamtfehlers handelt.

Betrachtet man zunächst unabhängig von der Teilchensorte die positiven $\hat{\sigma}$ -Werte, so zeigt sich ein schwach abnehmender Trend mit zunehmendem radialem Abstand. Die $\hat{\sigma}$ -Werte einer Teilchensorte für verschiedene Energiekanäle unterscheiden sich dabei innerhalb des Fehlerbalkens nicht voneinander.

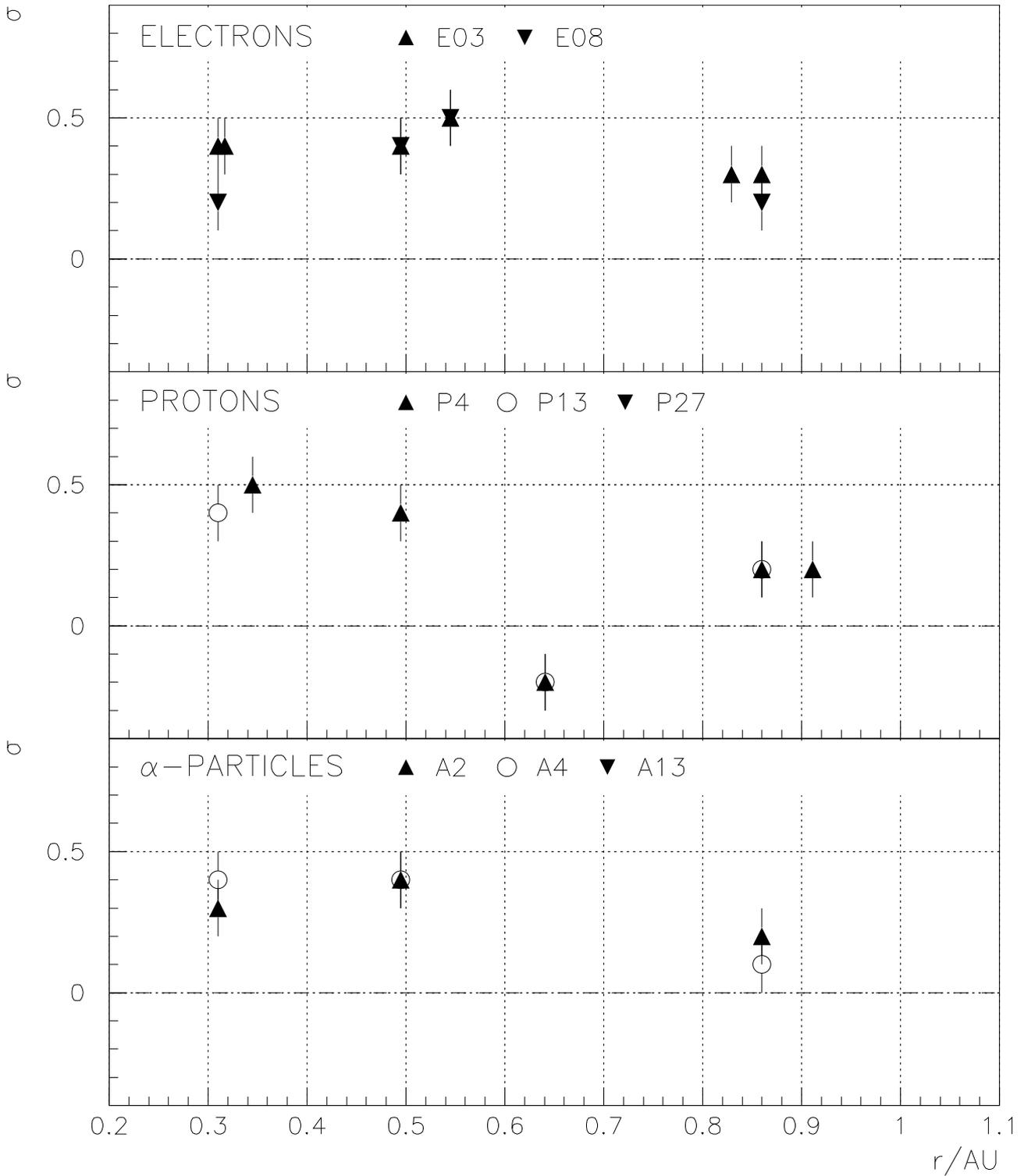


Abbildung 6.9: Die aus den stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ bestimmten $\hat{\sigma}$ -Werte des PWSK sind für Elektronen (oberer Teil), Protonen (mittlerer Teil) und α -Teilchen (unterer Teil) über dem radialen Abstand aufgetragen. Die Energiekanäle des E6-Experiments sind durch verschiedene Symbole gekennzeichnet. Die eingezeichneten Fehlerbalken ergeben sich aus dem systematischen Fehler der graphischen Bestimmungsmethode (siehe Text).

Besondere Aufmerksamkeit verdient das solare Ereignis vom 19. November (doy 323) 1981 auf HELIOS 1, da es das einzige Ereignis ist, für das in den Protonenkanälen P4 und P13 negative $\hat{\sigma}$ -Werte bestimmt worden sind. Betrachtet man die Magnetfeld- und Plasmadaten in diesem Zeitraum, so ist jedoch nichts Ungewöhnliches zu bemerken. Lediglich die für dieses Ereignis bestimmte radiale mittlere freie Weglänge weist im Vergleich zu den anderen in dieser Arbeit untersuchten Ereignissen den höchsten Wert auf. Für die lokale Umgebung, auf der sich die PWV auf die Ausbreitungsbedingungen einstellt, ergibt sich daher ein großer räumlicher Bereich, so daß die bei der Berechnung der numerischen Lösungen gemachten Annahmen über die Ausbreitungsbedingungen möglicherweise in diesem Fall nicht zutrifft. Dies gilt sowohl für die Annahme einer konstanten radialen mittleren freien Weglänge als auch für die Annahme einer Fokussierungslänge, die durch die Archimedische Spirale des interplanetaren Magnetfeldes bestimmt ist.

Speziell bei der Form der Archimedischen Spirale handelt es sich um die mittlere Richtung des Magnetfeldes, von der das lokal gemessene Magnetfeld in Einzelfällen durchaus über Zeiträume von mehreren Stunden abweichen kann. Für die Fokussierungslänge L ergeben sich dann natürlich ebenfalls lokal systematisch abweichende Werte, so daß die Teilchen entlang der Flußröhre, der sie folgen, eine Fokussierungslänge wahrnehmen, die deutlich von der aus der Archimedischen Spirale vorgegebenen Fokussierungslänge abweicht. Solche Ereignisse können z. B. durch sich im interplanetaren Medium ausbreitende koronale Massenauswürfe (coronal mass ejections) hervorgerufen werden. Da es sich bei den in Abbildung 6.9 ausgewerteten Ereignissen jedoch, was diesen Aspekt anbetrifft, um eine zufällige Auswahl handelt, können die überwiegend positiven $\hat{\sigma}$ -Werte nicht mit diesen sporadisch auftretenden systematischen Abweichungen von der charakteristischen Fokussierungslänge erklärt werden. Trotzdem kann es bei einzelnen Ereignissen zu deutlichen Abweichungen kommen, wie das Beispiel des Ereignisses vom 19. November 1981 zeigt. Das gleiche Argument ist auch für die Annahme einer konstanten radialen mittleren freien Weglänge, d. h. $b = 0$ (siehe Gleichung (2.26)), anzuführen, da es auch hier für einzelne Ereignisse zu Abweichungen kommen kann, wie das solare Ereignis vom 11. April (doy 101) 1978 auf HELIOS 2 zeigt, für welches VALDÉS-GALICIA ET AL. [1988] einen b -Wert von $b = -1$ angeben.

Für die Bestimmung der über die Elektronen-, Protonen- und α -Teilchenkanäle gemittelten $\hat{\sigma}$ -Werte werden die negativen $\hat{\sigma}$ -Werte nicht berücksichtigt, so daß sich für die Elektronen ein Wert von $\hat{\sigma}_E = 0.36 \pm 0.11$, für die Protonen ein Wert von $\hat{\sigma}_P = 0.32 \pm 0.13$ und für die α -Teilchen ein Wert von $\hat{\sigma}_A = 0.30 \pm 0.13$ ergibt. Die gemittelten $\hat{\sigma}$ -Werte der einzelnen Teilchensorten weichen somit kaum voneinander ab, obwohl sich die Steifigkeiten der Elektronen und der Protonen deutlich voneinander unterscheiden und obwohl die mittlere freie Weglänge der Protonen um den Faktor 1.7 ± 0.6 (siehe Abschnitt 6.2.3.4) größer ist als die der Elektronen.

Setzt man die gemittelten $\hat{\sigma}$ -Werte in die Gleichung (2.21) des PWSK ein, so ergibt sich die in Abbildung 2.2 f) dargestellte Form des PWSK, bei der sich die Streuung in den beiden Halbräumen um den Faktor ≈ 2 unterscheidet. Die Teilchen werden also unabhängig davon, ob es sich um Elektronen, Protonen oder α -Teilchen handelt, im Verhältnis doppelt so stark gestreut, wenn sie in Richtung zur Sonne fliegen als wenn sie in Richtung des interplanetaren Raumes fliegen!

6.3.2.1 Vergleich mit publizierten Ergebnissen

Den Autoren BEECK [1987] und BEECK AND WIBBERENZ [1987] ist beim Vergleich der mittleren freien Weglängen aus der Fit-Methode mit den aus den M_n -Koeffizienten ermittelten Werten anhand der solaren Ereignisse vom 22. November (doy 326) 1977 und vom 27. Dezember (doy 361) 1977 aufgefallen, daß die aus den M_n -Koeffizienten ermittelten mittleren freien Weglängen um den Faktor ≈ 5 größer sind. Ihre Schlußfolgerung lautet, daß die Annahme symmetrischer PWSKs zugunsten unsymmetrischer Formen, die mit Hilfe des $\hat{\sigma}$ -Parameters beschrieben werden können (siehe Gleichung (2.21)), aufgegeben werden muß. WIBBERENZ AND GREEN [1988] bezeichnen dies als interne Überprüfung auf Konsistenz der mittleren freien Weglängen, die sich aus beiden Methoden ergeben. Da die mittleren freien Weglängen nicht übereinstimmen, kommen sie zu der Schlußfolgerung, daß der PWSK als unsymmetrisch angenommen werden muß. Mit dieser Annahme über die Form des PWSK werten BEECK AND WIBBERENZ [1990] die Protonenkanäle von neun solaren Ereignissen aus und erhalten einen Mittelwert von $\hat{\sigma}_P = 0.35 \pm 0.09$. Es zeigt sich dabei, daß der $\hat{\sigma}$ -Wert für kleinere radiale Abstände zunimmt. Der so ermittelte $\hat{\sigma}_P$ -Wert liegt sehr dicht bei dem in dieser Arbeit ermittelten Wert von $\hat{\sigma}_P = 0.32 \pm 0.13$.

Dies ist erstaunlich, da BEECK AND WIBBERENZ [1990] zum einen die diffusive Näherung verwenden und zum anderen den M_4 -Koeffizienten unter der Annahme zur Auswertung heranziehen, daß die Form des PWSK durch das Standardmodell (siehe Gleichung (2.17)) vorgegeben ist. Der Wert des M_4 -Koeffizienten ist jedoch nur mit großer Unsicherheit behaftet aus den Meßwerten zu bestimmen und ist zudem von dem (\hat{q}, H) -Paar abhängig, welches die Form des PWSK bestimmt (siehe Abschnitt 5.3.3). Verständlich wäre die Übereinstimmung der $\hat{\sigma}_P$ -Werte, wenn die Annahme von BEECK AND WIBBERENZ [1990] über die Form des PWSK zuträfe. Dies halte ich jedoch angesichts der großen Unsicherheit des M_4 -Koeffizienten und angesichts des Näherungscharakters der diffusiven Näherung für unwahrscheinlich und bin der Meinung, daß es sich hier um eine zufällige Übereinstimmung handelt. Gestützt wird meine Vermutung durch die Tatsache, daß die für dieselben Ereignisse ermittelten \hat{q}_P -Werte, wie in Abschnitt 6.3.1 gezeigt, nicht übereinstimmen.

6.3.2.2 Folgerungen in Bezug auf das Ausbreitungsmedium

Als Erklärung für die beobachtete Asymmetrie des PWSK kommen prinzipiell mehrere Effekte in Frage, unter anderem die Polarisierung. Diese wird von BEECK AND WIBBERENZ [1990] jedoch verworfen, da die gemessenen PWVs der Elektronen und Protonen einander zu ähnlich seien, als daß man den zu erwartenden Vorzeichenwechsel des $\hat{\sigma}$ -Wertes in den PWVs der Elektronen beobachten könne. Die durch die Polarisierung hervorgerufene Asymmetrie sei räumlich ladungsvorzeichenabhängig (siehe Abschnitt 2.1.2), da die Elektronen und Protonen bei gleichem Magnetfeld einen unterschiedlichen Drehsinn hätten. Stattdessen favorisieren sie Effekte, die nicht der Resonanzwechselwirkung und damit dem Ladungsvorzeichen der Teilchen unterliegen (wie z. B. die Spiegelung), dafür aber von der Ausbreitungsrichtung der Teilchen abhängig sind.

Das Argument, daß die für die Polarisierung als Ursache der Asymmetrie des PWSK notwendige Vorzeichenabhängigkeit nicht zu beobachten ist, wird hier bestätigt, da der $\hat{\sigma}_E$ - und der $\hat{\sigma}_P$ -Wert das gleiche Vorzeichen haben und sogar vom Betrag her gleich sind. Die gemessenen PWVs und die daraus abgeleiteten $\hat{\sigma}$ -Werte sprechen somit gegen die Polarisierung als Ursache für die Asymmetrie des PWSK. Es stellt sich damit die Frage, ob die Polarisierung

auch anhand der gemessenen Magnetfeldfluktuationen ausgeschlossen werden kann.

MATTHAEUS, GOLDSTEIN, AND SMITH [1982] haben die Polarisation des Magnetfeldes anhand von Voyager-Daten bei einem radialen Abstand von 2.8 AU untersucht und eine Polarisation nur bei niedrigen Frequenzen von $\approx 10^{-5}$ Hz gefunden. Bei höheren Frequenzen zwischen 10^{-4} Hz und 10^{-2} Hz oszilliert der σ -Wert hingegen um null in einem Bereich von $\sigma = \pm 0.4$. Diese Messungen werden im wesentlichen von SMITH AND BIEBER [1993] bei einem radialen Abstand von 1 AU bestätigt, wobei die Autoren darauf hinweisen, daß die für niedrige Frequenzen von $\approx 10^{-5}$ Hz gefundene Polarisation nur Auswirkungen auf Teilchen mit einer Steifigkeit von ≈ 10 GV bei einem radialen Abstand von 1 AU hat. In dem Frequenzbereich von $> 10^{-5}$ Hz, der für die Steifigkeiten der hier betrachteten Teilchen von Bedeutung ist, oszilliert die Polarisation hingegen zwischen negativen und positiven Werten, wie auch die Auswertungen der Magnetfeldmessungen der HELIOS-Satelliten von BRUNO AND DOBROWOLNY [1986] bei einem radialen Abstand von 0.3 bis 1 AU ergeben. Von besonderem Interesse ist es natürlich, die Magnetfeldfluktuationen zum Zeitpunkt der gemessenen solaren Ereignisse zu untersuchen. OTAOLA AND VALDÉS-GALICIA [1995] untersuchen die Polarisation im Verlaufe von acht solaren Ereignissen auf den HELIOS-Satelliten und bestätigen, daß der Effekt der Polarisation während dieser Zeiträume zu vernachlässigen sei.

Neueste Untersuchungen von SCHMIDT AND DRÖGE [1996] spalten die gemessenen Magnetfeldfluktuationen in vier zirkular polarisierte Wellenmoden auf, indem den zirkular polarisierten Wellen zusätzlich zu dem Drehsinn (siehe Gleichung (2.19)) noch eine Ausbreitungsrichtung zugeordnet wird (+ in Richtung des Magnetfeldes, – entgegengesetzt der Richtung des Magnetfeldes). Als Resultat erhalten sie Magnetfeldspektren wie im linken Teil der Abbildung 6.10, die aus vier Komponenten bestehen. Bei den so dargestellten Magnetfelddaten handelt es sich um Daten, die während des Zeitraumes vom Tag 105 bis zum Tag 110.08 des Jahres 1976 auf HELIOS 2 gemessen wurden. Bei den beiden oberen Kurven im linken Teil der Abbildung 6.10 handelt es sich um auslaufende und bei den beiden unteren Kurven um einlaufende Wellen. Es liegt demnach eine deutliche *Kreuzhelizität* vor, die folgendermaßen definiert ist:

$$H_c(k_{\parallel}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_{\text{R}}^+(k_{\parallel}) + I_{\text{L}}^+(k_{\parallel})}{I_{\text{tot}}(k_{\parallel})} \quad (6.9)$$

Dabei sind $I_{\text{L}}^+(k_{\parallel})$ und $I_{\text{R}}^+(k_{\parallel})$ die wellenzahlabhängigen Intensitäten der in Richtung des Magnetfeldes laufenden links- und rechtspolarisierten Wellenmoden der Gesamtintensität $I_{\text{tot}}(k_{\parallel})$.

In dem hier betrachteten Fall überwiegen die auslaufenden Wellen im Verhältnis zu den einlaufenden Wellen. Die Kreuzhelizität ist für die hier ausgewerteten Energiekanäle aber nur von sehr geringer Bedeutung, da die Alfvén-Wellen sich mit einer Geschwindigkeit von $v_A = 134$ km/s ausbreiten, die sehr viel kleiner ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{\parallel} der hier betrachteten Teilchen. Lediglich für Teilchen mit einem Pitchkosinus von $\mu \approx 0$ hat dies eine Bedeutung (siehe SCHLICKSEISER [1989]), was die hier zu beobachtende Asymmetrie über große Pitchkosinusbereiche jedoch nicht erklären kann.

Von Interesse ist vielmehr der Unterschied zwischen den gestrichelten (linksläufige Wellen) und den durchgezogenen (rechtläufige Wellen) Kurven. Die Definition des Polarisationsparameters σ kann nun für die Ausbreitungsrichtung der Wellen erweitert werden, so daß man

HELIOS 2 – 105:00–110:08 1976

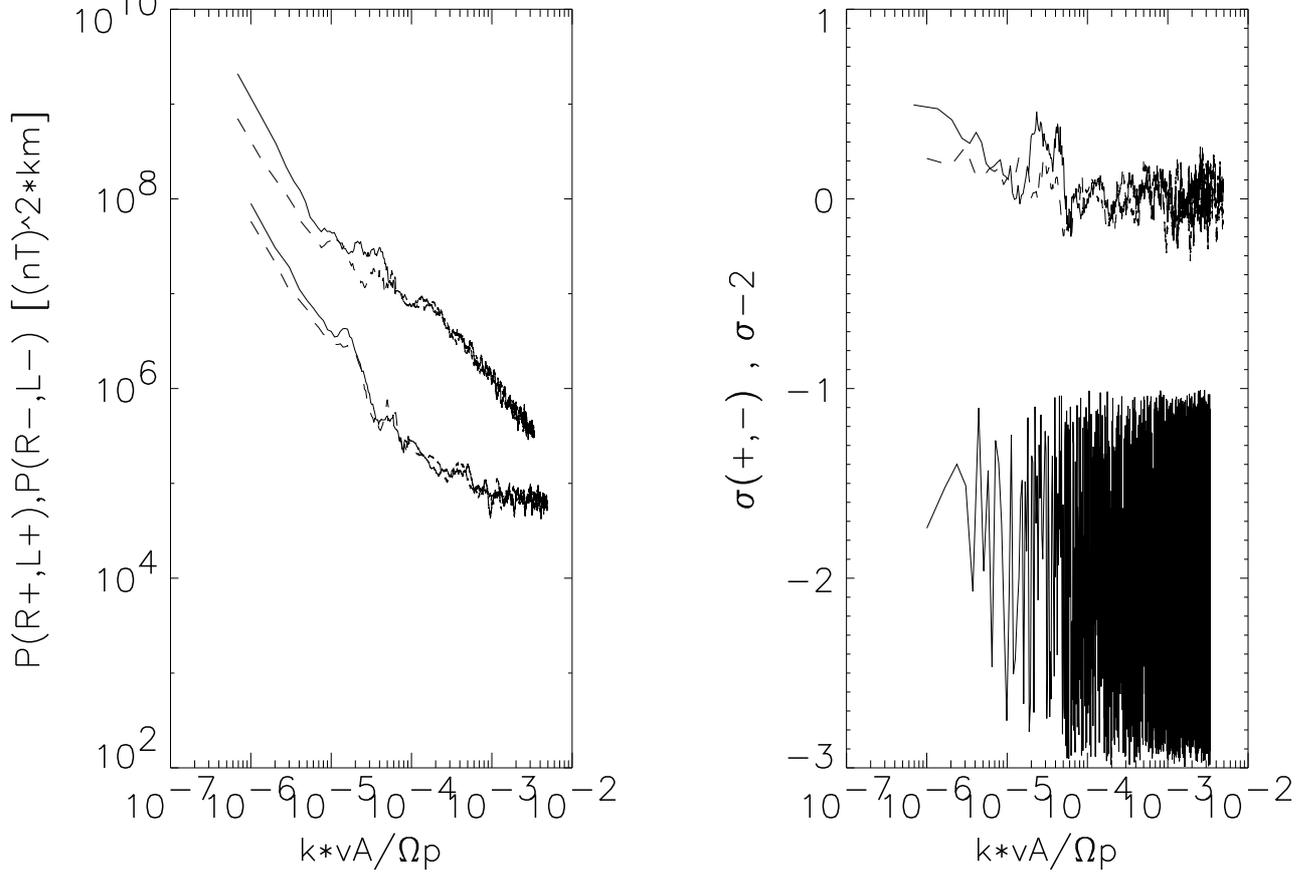


Abbildung 6.10: Im linken Teil ist die in vier zirkular polarisierte Wellenmoden aufgespaltene Spektraldichte der Magnetfeldfluktuationen dargestellt. Die oberen Kurven stellen auslaufende und die unteren Kurven einlaufende Wellen dar. Zusätzlich wird zwischen linksläufigen (gestrichelte Kurven) und rechtsläufigen (durchgezogene Kurven) Wellen unterschieden. Im rechten Teil oben sind die σ -Parameter für die auslaufenden (durchgezogene Kurven) und die einlaufenden (gestrichelte Kurven) Wellen aufgetragen. Zum Vergleich ist um -2 verschoben im unteren Teil der σ -Parameter dargestellt, wie er sich mit herkömmlichen Auswertungsmethoden ergibt (aus SCHMIDT AND DRÖGE [1996], mit freundlicher Genehmigung).

für die in Richtung des Magnetfeldes laufenden Wellen die Definition

$$\sigma^+(k_{\parallel}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_L^+(k_{\parallel}) - I_R^+(k_{\parallel})}{I_{\text{tot}}(k_{\parallel})} \quad (6.10)$$

und für die in die entgegengesetzte Richtung laufenden Wellen die Definition

$$\sigma^-(k_{\parallel}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_L^-(k_{\parallel}) - I_R^-(k_{\parallel})}{I_{\text{tot}}(k_{\parallel})} \quad (6.11)$$

erhält. Im rechten Teil der Abbildung 6.10 (oben) sind die σ^+ -Werte der auslaufenden Wellen (durchgezogene Kurve) und σ^- -Werte der einlaufenden Wellen (gestrichelte Kurve) der im linken Teil der Abbildung gezeigten Komponenten des Spektrums über der normierten Wellenzahl $k_{\parallel}v_A/\omega_P$ aufgetragen.⁶ Auch hier bestätigt sich, daß eine Polarisation nur bei sehr niedrigen Frequenzen zu beobachten ist, während die Polarisation bei hohen Frequenzen um $\sigma = 0$ schwankt. Ein deutlicher Vorteil der Methode von SCHMIDT AND DRÖGE [1996] ist die Berücksichtigung der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_A der polarisierten Wellen, welche zu unterschiedlichen Dopplerverschiebungen für ein- und auslaufende Wellen führt, wodurch das bei anderen Autoren auftretende typische Rauschen für die höheren Frequenzen verschwindet. Zum Vergleich ist im rechten Teil der Abbildung 6.10 (unten) die Polarisation nach Gleichung (2.19) aufgetragen, wie sie sich unter Verwendung der herkömmlichen Auswertungsmethoden ergibt. Die um -2 verschobene Kurve zeigt bei höheren Frequenzen das typische Oszillieren der Polarisation zwischen positiven und negativen Werten.

Es bleibt also festzuhalten, daß auch mit der ausgefeilten Methode von SCHMIDT AND DRÖGE [1996] keine Polarisation in den Magnetfeldfluktuationen zu beobachten ist, die die Asymmetrie des PWSK erklären könnte.

Die von BEECK AND WIBBERENZ [1990] vorgeschlagene Erklärung durch Spiegelung der Teilchen an magnetoakustischen Wellen ist auch eher unwahrscheinlich, da dies speziell den Pitchkosinus um $\mu = 0$ betreffen sollte. Die beobachtete Asymmetrie des PWSK geht jedoch über große Bereiche des PWSK, da der g_2 -Koeffizient, auf dessen Wert die hier abgeleitete Asymmetrie beruht, kaum auf Strukturen reagiert, die nur kleine Pitchkosinusbereiche überdecken.

6.4 Folgerungen in Bezug auf das Ausbreitungsmodell

6.4.1 Die Wahl der Ausbreitungsbedingungen

Nimmt man an, daß die Transportgleichung (2.1) für die energiereichen geladenen Teilchen eine angemessene Beschreibung darstellt, dann bleibt zu hinterfragen, ob die bisher gemachte Annahme über sich auf kleinen räumlichen Skalen nur geringfügig ändernde Ausbreitungsbedingungen zu idealisiert ist. Auf kleinen räumlichen Skalen entlang der Flußröhre könnte es zu Abweichungen vom analytisch vorgegebenen Verlauf sowohl für die Fokussierungslänge L als auch für die radiale mittlere freie Weglänge λ_r kommen.

Messungen des Magnetfeldes zeigen neben den in Abschnitt 6.3.2 erwähnten großskaligen Abweichungen durchaus auch kleinskalige Abweichungen. Die sich entlang einer Flußröhre ausbreitenden Teilchen dürften daher eine Fokussierungslänge wahrnehmen, die nur im Mittel der aus der Archimedischen Spirale des interplanetaren Magnetfeldes abgeleitete Fokussierungslänge folgt. Betrachtet man desweiteren die gemessenen Magnetfeldfluktuationen, so zeigen diese bereits auf Zeitskalen von einer Stunde in der Spektraldichte eine große Variation, wie jüngst durchgeführte Untersuchungen (siehe WANNER [1993], S. 76ff.) ergeben haben. WANNER UND WIBBERENZ [1993] interpretieren dies als eine "schachbrettartige" Struktur des interplanetaren Magnetfeldes. Dieser auch als *räumliche Intermittenz* bezeichnete plötzliche Übergang zu turbulenten Strukturen mit den entsprechenden Auswirkungen

⁶Die von SCHMIDT AND DRÖGE [1996] berechneten Polarisationsparameter sind mit dem Faktor -1 zu multiplizieren, da ihre Definition der Polarisation verschieden von den hier verwendeten Definitionen (6.10) und (6.11) ist.

auf die Ausbreitungsbedingungen ist zudem ein aktuelles Forschungsgebiet des Sonnenwindes (siehe MARSCH, TU, AND ROSENBAUER [1996]). Demnach könnte die gemachte Annahme über eine konstante radiale mittlere freie Weglänge zumindest auf kleinen räumlichen Skalen durchaus verletzt sein.

Testweise durchgeführte numerische Rechnungen mit sich auf kleinen räumlichen Skalen periodisch ändernden Ausbreitungsbedingungen haben gezeigt, daß die PWVs auch in diesem Fall im wesentlichen über die Ausbreitungsbedingungen der lokalen Umgebung mitteln. Physikalisch ist dies verständlich, da sich die Teilchen bei der Ausbreitung entlang einer Flußröhre nicht beliebig schnell auf die sich kleinskalig ändernden Ausbreitungsbedingungen einstellen können. Demnach kann aus den gemessenen PWVs nur auf Ausbreitungsparameter geschlossen werden, die im statistischen Mittel die in der lokalen Umgebung vorherrschenden Ausbreitungsbedingungen wiedergeben. Es ist somit nicht möglich, anhand der gemessenen PWVs festzustellen, ob eine "schachbrettartige" Struktur des interplanetaren Magnetfeldes vorliegt.

Die in Abschnitt 6.1 diskutierte potentielle "Streifigkeit" des interplanetaren Magnetfeldes und damit der Ausbreitungsbedingungen hätte hingegen einen Einfluß auf die zu messenden PWVs. Bedingt durch die kontinuierlich stattfindende Korotation entspricht der zeitlichen Mittelung der PWVs sowohl durch den Meßprozess als auch zusätzlich durch das hier verwendete Auswertungsverfahren einer Mittelung über verschiedene PWVs benachbarter Flußröhren. Dabei kommt es zu gemittelten Legendre-Koeffizienten $\langle g_{ns} \rangle$, die nicht mehr notwendigerweise mit den über die Flußröhren gemittelten Ausbreitungsbedingungen konsistent sind. Dies wird im folgenden verdeutlicht.

Betrachtet man die Legendre-Koeffizienten g_{1s} und g_{2s} , die für den Fall des PWSK aus dem Standardmodell für ein Verhältnis $\lambda_{||}/L \lesssim 1$ in den Gleichungen (A.13) und (A.14) im Anhang A angegeben sind, so ergeben sich für $\hat{\sigma} = 0$ folgende Proportionalitäten:

$$g_{1s} \propto \frac{\lambda_{||}}{L} \quad \text{und} \quad g_{2s} \propto \left(\frac{\lambda_{||}}{L} \right)^2 \quad (6.12)$$

Diese unterschiedliche Abhängigkeit der Legendre-Koeffizienten g_{1s} und g_{2s} vom Verhältnis $\lambda_{||}/L$ ist auch deutlich in den Abbildungen 4.10 und 4.11 zu erkennen. Die Kurven der stationären Anisotropien $\xi_{1s} \propto g_{1s}$ und $\xi_{2s} \propto g_{2s}$ verhalten sich bei einer Vervierfachung von λ_r bzw. von $\lambda_{||}$ deutlich verschieden. Mittelt nun der Meßprozess über die in der Gleichung (6.12) gezeigten Proportionalitäten, so ergibt sich:

$$\langle g_{1s} \rangle \propto \left\langle \frac{\lambda_{||}}{L} \right\rangle \quad \text{und} \quad \langle g_{2s} \rangle \propto \left\langle \left(\frac{\lambda_{||}}{L} \right)^2 \right\rangle \quad (6.13)$$

Für den $\langle g_{2s} \rangle$ -Koeffizienten bedeutet dies, daß keine unmittelbare Mittelung $(\langle \lambda_{||}/L \rangle)^2$ über die Ausbreitungsbedingungen stattfindet. Zeigt nun das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ eine starke Variation zwischen den verschiedenen Flußröhren, so ergeben das Quadrat des arithmetischen Mittels und das Mittel über die Quadrate des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ unterschiedliche Werte. Dieser Effekt wird jedoch nicht bei dem in Abschnitt 6.3 vorgestellten Auswertungsverfahren berücksichtigt. Stattdessen gilt für die Lösungen der numerischen Transportgleichung der in der Gleichung (6.12) dargestellte Zusammenhang.

Als Folge davon werden die Legendre-Koeffizienten nicht korrekt interpretiert, und man erhält aus den Legendre-Koeffizienten $\langle g_{1s} \rangle$ und $\langle g_{2s} \rangle$ unterschiedliche mittlere freie Weg-

längen λ_{\parallel} , die scheinbar im Widerspruch zueinander stehen. Dies geschieht unabhängig davon, ob die PWVs der Elektronen oder der Protonen ausgewertet werden. Eine Erhöhung des $\hat{\sigma}$ -Wertes in der numerischen Simulation behebt diesen scheinbaren Widerspruch, indem die berechneten g_{2s} -Koeffizienten in ihrem absoluten Wert angehoben werden, um sie den gemessenen $\langle g_{2s} \rangle$ -Koeffizienten anzupassen. Insofern stellen die in Abschnitt 6.3.2 bestimmten von null verschiedenen positiven $\hat{\sigma}$ -Werte ein starkes Indiz für die "Streifigkeit" der Ausbreitungsbedingungen im interplanetaren Medium dar. Dieselbe Schlußfolgerung wurde bereits im Abschnitt 6.1 aus den deutlich variierenden Zeitreihen der M_2 - und M_3 -Werte gezogen.

Die Situation für den $\langle g_{3s} \rangle$ -Koeffizienten bezüglich der Mittelung über das Verhältnis λ_{\parallel}/L ist vergleichbar mit der des $\langle g_{1s} \rangle$ -Koeffizienten. Zudem sind die aus einer Auswertung der ξ_{3s} - und M_{3s} -Werte hervorgegangenen \hat{q} -Werte untereinander konsistent. Damit ist auszuschließen, daß ein unter einer falschen Annahme über die räumliche Abhängigkeit der radialen mittleren freien Weglänge bestimmter g_{0s} -Koeffizient als Ursache für die von null verschiedenen $\hat{\sigma}$ -Werte in Frage kommt. Desweiteren wird in der Abbildung 6.1 deutlich, daß auch die Form des PWDK kleinskaligen räumlichen Variationen unterworfen sein kann. Dies zieht bei einer Auswertung des $\langle g_{3s} \rangle$ -Koeffizienten die Bestimmung eines entsprechend gemittelten \hat{q} -Parameters nach sich.

6.4.2 Die Wahl der Transportgleichung

Abschließend soll die grundsätzliche Frage erörtert werden, ob die hier verwendete Transportgleichung (2.1) das Problem der Teilchenausbreitung angemessen beschreibt. Die Transportgleichung ist als Überlagerung der als unabhängig voneinander angenommenen Effekte der Fokussierung und der Pitchwinkelstreuung konstruiert. Es besteht kein Zweifel, daß die Form des Fokussierungsterms unabhängig von der Streuung ist; anders sieht es jedoch mit dem Streuterm selbst aus. Die theoretischen Modelle der Pitchwinkelstreuung gehen in der Regel von einem homogenen mittleren Magnetfeld aus, um die ohnehin schon sehr aufwendigen Berechnungen nicht noch komplizierter zu gestalten. Die Streuung in der inneren Heliosphäre findet jedoch in einem inhomogenen Magnetfeld statt. Ist nun die Streuung sehr schwach, d. h. die mittlere freie Weglänge sehr groß, dann findet der Streuprozess auf räumlichen Skalen statt, auf denen sich die Inhomogenität des interplanetaren Magnetfeldes bemerkbar macht. Andererseits sollte es eine angemessene Näherung sein, bei kleinen mittleren freien Weglängen von einem homogenen Magnetfeld in dem den Streuprozess betreffenden räumlichen Bereich auszugehen. Sollte der im inhomogenen Magnetfeld stattfindende Streuprozess Ursache für die beobachtete Asymmetrie des PWSK sein, dann sollte die Stärke der Asymmetrie demnach von der Größe der mittleren freien Weglänge abhängig sein. Vergleicht man jedoch die $\hat{\sigma}$ -Werte der Elektronen und der Protonen miteinander, die unabhängig von ihrem Drehsinn in gleicher Weise auf das inhomogene Magnetfeld reagieren, so ergeben sich nahezu die gleichen Werte, obwohl die mittlere freie Weglänge der Protonen im Mittel um den Faktor 1.7 größer ist als die der Elektronen. Demnach scheint der Streuprozess bei den in dieser Arbeit ausgewerteten Ereignissen noch auf räumlichen Skalen stattzufinden, für die ein näherungsweise homogenes mittleres Magnetfeld angenommen werden kann.

Als weiteren Kritikpunkt kann man anführen, daß die Beschreibung des Streuprozesses durch einen Diffusionsterm in μ nicht angemessen ist. Findet der Streuprozess unter grober Verletzung der Alfvénschen Näherung statt, d. h. bei sich auf kleinsten räumlichen Skalen stark änderndem Magnetfeld, dann können die Teilchen ihren Pitchwinkel um große Be-

träge ändern. In diesem Fall könnte man den Streuprozeß beispielsweise durch eine Matrix beschreiben, die die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den unterschiedlichen Pitchwinkeln angibt. Dagegen spricht jedoch der \hat{q} -Wert, der in Abschnitt 6.3.1 bestimmt wurde und der ein deutliches “resonance gap” aufzeigt, das mit den groben Vorgaben des Standardmodells für einen typischen Spektralindex von $q = 1.6$ übereinstimmt. Die Bedeutung der Resonanzwechselwirkung scheint damit bestätigt.

Die zweidimensionale Transportgleichung (2.1) beschränkt sich auf Lösungen in den Koordinaten Bogenlänge s und Pitchkosinus μ bzw. die dreidimensionale erweiterte Transportgleichung (4.1) auf Lösungen mit der zusätzlichen Koordinate des Betrags der Geschwindigkeit v . Im Vergleich zur sechsdimensionalen Focker-Planck-Gleichung handelt es sich somit um ein stark reduziertes Modell. Die Beschränkung auf Pitchwinkelverteilungen scheint durchaus gerechtfertigt zu sein, wie man z. B. anhand der guten Übereinstimmung zwischen der Magnetfeldrichtung und der aus den PWVs ermittelten Symmetrieachse schließen kann (siehe Abschnitt 1.3.1). Dennoch stellt die Vernachlässigung eines senkrecht zum Magnetfeld stattfindenden Teilchentransports, d. h. von senkrechten Driften und senkrechter Diffusion, eine signifikante Vereinfachung dar. Eine entsprechende Erweiterung der hier verwendeten Transportgleichung scheint daher wünschenswert, um die Aussagekraft des numerischen Modells zu erhöhen. Der damit verbundene größere Rechenaufwand dürfte durch die voranschreitende Rechnerentwicklung kompensiert werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden in der inneren Heliosphäre bei einem radialen Abstand von 0.3 AU bis 1 AU gemessene Pitchwinkelverteilungen (PWVs) energiereicher geladener Teilchen mit den aus einem theoretischen Transportmodell vorhergesagten PWVs verglichen, um so Rückschlüsse auf die Streueigenschaften des interplanetaren Mediums ziehen zu können. Das Transportmodell ist in Form einer partiellen Differentialgleichung (PDGl) formuliert, für die jedoch keine analytische Lösung bekannt ist, welche allgemeine Ausbreitungsbedingungen der Teilchen berücksichtigt, so daß numerische Lösungsmethoden angewandt werden müssen. Da die PDGl (2.1) kein Modellproblem der Numerik darstellt, können keine Standardprogramm Pakete zur Lösung der PDGl verwendet werden.

Ausgehend von einem Programm, das von NG AND WONG [1979] und WONG [1982] geschrieben und von SCHLÜTER [1985] in der Struktur umgeschrieben worden ist, werden in der vorliegenden Arbeit wesentliche Verbesserungen an den numerischen Lösungsmethoden vorgenommen. Dies ist notwendig, da die gemessenen PWVs detailliert untersucht werden; die numerisch berechneten Lösungen und die daraus berechneten PWVs dürfen also nur mit einem geringen Approximationsfehler behaftet sein. Weniger hoch sind hingegen die Anforderungen an die Approximationsgenauigkeit der numerischen Lösungen, wenn es sich um die Auswertung der omnidirektionalen Intensität und der Anisotropie erster Ordnung handelt.

Interessanterweise ist die numerische Berechnung der PWVs für diejenigen Ausbreitungsparameter besonders anspruchsvoll, die für die physikalische Interpretation von besonderer Bedeutung sind. Da es sich bei dem Pitchkosinus-Transport um ein Konvektions-Diffusions-Problem handelt, sind dies die Ausbreitungsbedingungen, in denen das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ zwischen der mittleren freien Weglänge $\lambda_{||}$ und der Fokussierungslänge L besonders groß wird, die Zellen-Reynoldszahl also besonders große Werte annimmt. Dies tritt zum einen bei kleinen radialen Abständen von der Sonne und/oder bei schwacher Streuung, d. h. bei großen mittleren freien Weglängen, auf und zum anderen bei Pitchwinkeldiffusionskoeffizienten (PWSKs), die nur eine sehr geringe Streuung im Bereich um $\mu = 0$, d. h. ein sogenanntes "resonance gap", aufweisen. Desweiteren wird eine verbesserte Kopplung des räumlichen Transportes mit dem des Pitchkosinus-Transportes verwendet, wodurch sich bessere numerische Lösungen bei kleinen mittleren freien Weglängen ergeben. Im Rahmen einer Verbesserung des räumlichen Transportes wird die numerische Diffusion effizienter unterdrückt, die unter anderem bei den numerisch berechneten Lösungen zu Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Teilchen führt, welche die realen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Teilchen übertreffen. Dies ist besonders dann hinderlich, wenn man vom Zeitpunkt des Beginns eines solaren Ereignisses Rückschlüsse

auf den Zeitpunkt der Beschleunigung der Teilchen in der Nähe der Sonne ziehen möchte.

Neben der Approximationsgenauigkeit der numerischen Lösungen wurde besonderer Wert auf die Effizienz des verwendeten Differenzenverfahrens gelegt, da die Berechnung der für die Auswertung der gemessenen PWVs nötigen stationären Lösungen sehr aufwendig ist. Bei einem Vergleich der numerischen Lösungen mit den Lösungen nach dem Differenzenverfahren von RUFFOLO [1991] hat sich ergeben, daß das in dieser Arbeit verwendete Differenzenverfahren bei vergleichbarer Approximationsgenauigkeit um zwei Größenordnungen schneller ist. Von Vorteil ist die Effizienz des Differenzenverfahrens weiterhin bei der Lösung der erweiterten Transportgleichung (4.1), in welcher die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration berücksichtigt werden. Die Transportgleichung (2.1) wird dabei um die Koordinate des Impulses erweitert, wodurch der Rechenaufwand des Differenzenverfahrens erheblich steigt. Ausgehend von dem von RUFFOLO [1995] vorgestellten Differenzenverfahren werden Verbesserungen vorgenommen, so daß die Approximationsgenauigkeit der numerischen Lösungen steigt. Auf diese Weise kann gezeigt werden, daß die numerisch berechneten PWVs im mit dem Sonnenwind mitbewegten Bezugssystem in der Spätphase eines solaren Ereignisses gegen schwach anisotrope Verteilungen streben. Dies steht im Gegensatz zu der in der Literatur weit verbreiteten Meinung, daß sich für lange Ausbreitungszeiten isotrope PWVs einstellen.

Große Bedeutung für diese Arbeit hat das jüngst von BIEBER [1996] aufgestellte steady-state-Theorem, das eine Proportionalität zwischen der stationären Lösung und den über der Zeit integrierten zeitabhängigen Lösungen herstellt. Der Beweis von BIEBER [1996] wurde vereinfacht und auf die erweiterte Transportgleichung ausgedehnt. Das steady-state-Theorem wird erfolgreich zur Überprüfung der Differenzenverfahren der Transportgleichung (2.1) und der erweiterten Transportgleichung (4.1) verwendet. Dies ist besonders bei der erweiterten Transportgleichung von Nutzen, da es wegen der Komplexität der PDGI (4.1) keine angemessenen analytischen Lösungen für Spezialfälle der Ausbreitungsbedingungen gibt, um das Differenzenverfahren zu überprüfen.

Die grundsätzliche Bedeutung des steady-state-Theorems liegt jedoch in der Tatsache, daß die gemessenen PWVs auf die stationären Lösungen reduziert werden können. Die stationären Lösungen sind damit unabhängig vom Injektionsprofil, wodurch die Bestimmung der Ausbreitungsparameter aus den gemessenen PWVs wesentlich vereinfacht wird. Der hohe numerische Rechenaufwand zur Berechnung der stationären Lösungen, die zum Vergleich mit den aus den gemessenen PWVs mit Hilfe des steady-state-Theorems berechneten stationären PWVs erforderlich sind, muß daher nur einmal investiert werden.

Desweiteren ist es notwendig, die stationären Lösungen der Transportgleichung (2.1) mit denen der erweiterten Transportgleichung (4.1) zu vergleichen, da die wegen des steady-state-Theorems geforderte Integration über das gesamte zeitliche Profil des solaren Ereignisses die Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration an Einfluß zunehmen läßt. Diese Effekte machen sich besonders in der Spätphase der solaren Ereignisse bemerkbar, wie an den berechneten Lösungen der erweiterten Transportgleichung zu erkennen ist. Der Vergleich der stationären Lösungen zeigt jedoch, daß die relativen Effekte der Konvektion und der adiabatischen Dezeleration lediglich bei sehr kleinen mittleren freien Weglängen zu berücksichtigen sind. Für die in dieser Arbeit betrachteten Teilchen im MeV Bereich haben sie im allgemeinen nur einen geringen Einfluß. Da das Ausmaß dieser Effekte quantitativ angegeben werden kann, ist es möglich, im weiteren Verlauf der Arbeit mit der einfacheren zu handhabenden Transportgleichung (2.1) zu rechnen.

Bestimmt man die Ausbreitungsbedingungen aus den nach dem steady-state-Theorem

aufintegrierten PWVs, indem man diese mit den numerisch berechneten Lösungen der Transportgleichung (2.1) vergleicht, so kommt man ohne Näherungen aus. Viele Autoren gehen hingegen von der sogenannten diffusiven Näherung aus, die für starke Streuung eine Näherung der Transportgleichung (2.1) darstellt. Da die diffusive Näherung im Zusammenhang mit der Bestimmung der Ausbreitungsparameter aus den gemessenen PWVs eine so große Bedeutung erlangt hat, wird der Näherungscharakter dieser Art der Bestimmung anhand der numerischen zeitabhängigen und stationären Lösungen der Transportgleichung (2.1) untersucht. In diesem Zusammenhang wird gezeigt, daß die normierte Verteilungsfunktion und die lokale Kennfunktion äquivalente Beschreibungen des anisotropen Anteils der PWVs darstellen. Je nachdem, ob die diffusive Näherung als Näherung der stationären oder der zeitabhängigen Transportgleichung (2.1) verwendet wird, ist der Näherungscharakter mehr oder weniger stark ausgeprägt.

So zeigt sich, daß die normierte Verteilungsfunktion der stationären Lösung und der diffusiven Näherung einander sehr ähnlich sind, falls die Ausbreitungsbedingungen in der lokalen Umgebung, in der sich die PWVs auf die Ausbreitungsbedingungen einstellen, konstant sind. Die Größe des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ ist dabei ohne Bedeutung. Nur indirekt macht sich eine Abhängigkeit vom Verhältnis $\lambda_{||}/L$ bemerkbar, da mit größer werdendem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ die lokale Umgebung an räumlicher Ausdehnung zunimmt, und so die Forderung nach konstanten Ausbreitungsbedingungen nicht mehr zu erfüllen ist. Die normierte Verteilungsfunktion stellt daher besonders bei großen radialen Abständen von der Sonne sowie bei kleinen radialen Abständen und kleinen mittleren freien Weglängen eine gute Näherung der stationären Lösung der Transportgleichung (2.1) dar. Bei kleinen radialen Abständen und mittleren bzw. großen mittleren freien Weglängen kann es jedoch zu deutlichen Unterschieden kommen. In diesem Bereich läßt sich dann die normierte Verteilungsfunktion nicht mehr als Funktion des Verhältnisses $\lambda_{||}/L$ auffassen. Dort, wo die normierte Verteilungsfunktion der diffusiven Näherung jedoch Gültigkeit hat, lassen sich aus den Ausbreitungsbedingungen Erkenntnisse über die Abhängigkeit der Legendre-Koeffizienten gewinnen, mit denen die PWVs beschrieben werden können. Die Ausbreitungsbedingungen lassen sich dabei durch die folgenden Parameter charakterisieren: Das Verhältnis $\lambda_{||}/L$ stellt ein Maß für das Verhältnis zwischen Streuung und Fokussierung dar, die Parameter \hat{q} , H und $\hat{\sigma}$ beschreiben die Form des PWSK. Speziell für die Parameter \hat{q} und H , welche die Breite und die Tiefe des “resonance gap” angeben, zeigt sich, daß mit den hier vorliegenden Messungen nicht zwischen verschiedenen (\hat{q}, H) -Paaren unterschieden werden kann. Die genaue Breite und Tiefe des “resonance gap” ist somit nicht zu bestimmen, und es kann lediglich ein integrales Maß des Diffusionsstroms durch das “resonance gap” hindurch angegeben werden.

Betrachtet man die diffusive Näherung als Näherung der Lösung der zeitabhängigen Transportgleichung (2.1), so zeigt sich, daß sich nur zum Zeitpunkt des Maximums der omnidirektionalen Intensität und bei kleinen Verhältnissen $\lambda_{||}/L$ eine zufriedenstellende Übereinstimmung ergibt. Dies ist eine Bestätigung des zunächst empirisch von KRAHMANN [1979] gefundenen Zusammenhangs, der in dieser Arbeit begründet wird. Eine zeitlich nahezu konstante normierte Verteilungsfunktion bzw. lokale Kennfunktion, wie sie von einigen Autoren vertreten wird, ist damit selbst bei kleinem Verhältnis $\lambda_{||}/L$ nicht zu beobachten. Als Folge daraus lassen sich Zeitreihen für beliebige Ausbreitungsbedingungen nicht aus den gemessenen PWVs bestimmen.

Dennoch läßt sich für bestimmte Ausbreitungsbedingungen zumindest zeigen, daß die lokal gemessenen PWVs Schwankungen unterworfen sind, die ihre Ursache nicht in der Zähl-

statistik haben, sondern in den sich lokal ändernden Ausbreitungsbedingungen von Flußröhre zu Flußröhre. Dem Ausbreitungsmedium kann damit eine gewisse "Streifigkeit" zugeordnet werden. In Richtung der Flußröhre mitteln die PWVs hingegen über die Ausbreitungsbedingungen der lokalen Umgebung hinweg, die sich in etwa in der Größenordnung der mittleren freien Weglänge befindet.

Berechnet man nun mit Hilfe des steady-state-Theorems die stationären PWVs, so sind diese als Mittel über die PWVs und damit über die Ausbreitungsbedingungen in den verschiedenen Flußröhren zu verstehen. Dabei erfolgt eine Wichtung mit der Anzahl der Teilchen, so daß besonders die Ausbreitungsbedingungen zum Zeitpunkt des Maximums der omnidirektionalen Intensität die stationäre PWV dominieren.

Ausgehend von der gemessenen stationären Anisotropie ξ_{1s} wird ein graphisches Bestimmungsverfahren vorgestellt, das es ermöglicht, ohne Annahmen über die Injektionsfunktion die radiale mittlere freie Weglänge zu bestimmen. Lediglich der radiale Verlauf der mittleren freien Weglänge λ_r muß z. B. als konstant vorausgesetzt werden. Dieses graphische Bestimmungsverfahren erfordert im Gegensatz zu dem herkömmlichen Fit-Verfahren weder große Erfahrung des Anwenders noch die numerische Lösung der Transportgleichung für unterschiedliche Teilchengeschwindigkeiten und Injektionsprofile. Die bestimmten radialen mittleren freien Weglängen stimmen innerhalb ihrer Unsicherheiten mit den aus der Fit-Methode bestimmten Werten überein. Die Ergebnisse beider Methoden stützen sich somit gegenseitig.

Die aus der Fit-Methode für auf den HELIOS-Satelliten gemessene solare Ereignisse bestimmten radialen mittleren freien Weglängen stammen hauptsächlich aus den Kanälen E03 (Elektronen), P4, P13 und P27 (Protonen). Es werden für weitere solare Ereignisse in diesen Energiekanälen radiale mittlere freie Weglängen bestimmt und zusätzlich die Elektronen des E08-Kanals und die α -Teilchen der Kanäle A2, A4 und A13 systematisch ausgewertet. Die von KALLENRODE [1993] erzielten Ergebnisse werden dabei bestätigt und auf eine breitere Datengrundlage gestellt:

Die Annahme einer konstanten radialen mittleren freien Weglänge steht nicht im Widerspruch zu den bei einem radialen Abstand zwischen 0.3 AU und 1 AU gemessenen radialen mittleren freien Weglängen. Eine Steifigkeitsabhängigkeit der mittleren freien Weglänge ist in den Protonen-Kanälen nicht zu beobachten; dafür zeigt sich jedoch beim Vergleich der mittleren freien Weglängen des E03- und des P13-Kanals eine im Mittel um den Faktor 1.7 ± 0.6 größere mittlere freie Weglänge der Protonen des P13-Kanals. Dieser Wert steht in sehr guter Übereinstimmung mit den von KALLENRODE [1993] und BIEBER ET AL. [1994] ermittelten Werten von 1.6 ± 0.9 und 1.8 und zeigt erneut, daß das Standardmodell mit dieser gemessenen Steifigkeitsabhängigkeit der mittleren freien Weglänge nicht in Übereinstimmung steht.

Unter Hinzunahme der stationären Anisotropien ξ_{2s} und ξ_{3s} wird das graphische Bestimmungsverfahren so erweitert, daß der PWSK für gemessene solare Ereignisse in Form der Parameter \hat{q} , H und $\hat{\sigma}$ bestimmt werden kann. Wie oben bereits erwähnt, ist es dabei nicht möglich, verschiedene (\hat{q}, H) -Paare zu unterscheiden; d. h., die genaue Bestimmung der Breite und Tiefe des "resonance gap" kann mit den stationären Anisotropien ξ_{ns} mit $n = 1, 2, 3$ nicht erfolgen. Es wird daher $H = 0$ gesetzt, um einen der beiden Freiheitsgrade \hat{q} und H festzulegen, so daß im weiteren Verlauf der Auswertung der \hat{q} -Parameter bestimmt werden kann. Eine deutliche radiale Abhängigkeit der bestimmten \hat{q} -Werte kann dabei ebensowenig festgestellt werden wie eine Abhängigkeit von der Steifigkeit zwischen den Energiekanälen einer Teilchensorte. Lediglich zwischen den gemittelten \hat{q} -Werten der Elektronen-Kanäle von $\hat{q}_E = 1.45 \pm 0.12$ einerseits und der Protonen- und α -Teilchen-Kanäle von $\hat{q}_P = 1.53 \pm 0.09$

und $\hat{q}_A = 1.50 \pm 0.10$ andererseits kann ein Unterschied festgestellt werden. Es zeigt sich somit für alle hier untersuchten Energiekanäle ein “resonance gap”, das für die Protonen und α -Teilchen stark ausgeprägt ist. Die theoretischen Modelle der Teilchenstreuung, die auf der Resonanzwechselwirkung beruhen, scheinen somit im wesentlichen bestätigt, da sich für die hier bestimmten \hat{q} -Werte auch nach den theoretischen Modellen ein “resonance gap” ergibt. Andererseits können Modelle, welche nichtlineare Korrekturen berücksichtigen und so mit steigender relativer Stärke der Magnetfeldfluktuationen das “resonance gap” auffüllen, auf einen unteren Wert der relativen Stärke der Magnetfeldfluktuationen begrenzt werden. Eine Unterscheidung zwischen verschiedenen Modellen, die mit unterschiedlichen Geometrien der Ausbreitungsrichtungen der Wellen arbeiten, ist wegen der ungenauen Bestimmung der Form des “resonance gap” nicht möglich, so daß die hier bestimmten Formen des PWSK sogar mit dem Standardmodell konsistent sind.

Bei der Bestimmung des $\hat{\sigma}$ -Parameters zur Darstellung von unsymmetrischen PWSKs zeigt sich, daß die gemessenen stationären Anisotropien ξ_{2s} systematisch zu hoch liegen, um sie mit einem identisch verschwindenden $\hat{\sigma}$ -Parameter, d. h. $\hat{\sigma} = 0$, erklären zu können. Nimmt man daher einen von null verschiedenen $\hat{\sigma}$ -Parameter an, so ergibt sich eine Asymmetrie des PWSK von der Art, daß die Teilchen unabhängig von der Teilchensorte stärker gestreut werden, wenn sie in Richtung zur Sonne fliegen als wenn sie sich von der Sonne weg bewegen. Die gemittelten $\hat{\sigma}$ -Werte lauten für die Elektronen $\hat{\sigma}_E = 0.36 \pm 0.11$, für die Protonen $\hat{\sigma}_P = 0.32 \pm 0.13$ und für die α -Teilchen $\hat{\sigma}_A = 0.30 \pm 0.13$, wobei sich leicht erhöhte Werte bei geringerem radialen Abstand von der Sonne zeigen.

Ein Erklärungsversuch, der die so gemessenen $\hat{\sigma}$ -Werte auf eine Polarisation des Magnetfeldes zurückführt, scheitert, da weder die dann notwendige Ladungsvorzeichenabhängigkeit beobachtet wird noch irgendein Hinweis auf Polarisation aus den gemessenen Magnetfeldfluktuationen vorliegt, der die hier beobachtete Asymmetrie des PWSK erklären könnte. Stattdessen können die zu hohen gemessenen stationären Anisotropien ξ_{2s} auch als Resultat des Auswertungsprozesses interpretiert werden.

Zur Bestimmung der stationären Anisotropien werden die PWVs über einen längeren Zeitraum aufsummiert, so daß es bedingt durch die Korotation des interplanetaren Magnetfeldes zur Summation von PWVs kommt, die aus benachbarten Flußröhren stammen. Unter der Annahme, daß sich die Ausbreitungsbedingungen bezüglich des Verhältnisse $\lambda_{||}/L$ in den Flußröhren unterscheiden, kommt es beim Mittelungsprozess zur Entstehung von “hybriden” PWVs, denen keine realen Ausbreitungsbedingungen zugrundeliegen. Die zur Auswertung herangezogenen numerisch berechneten PWVs stellen sich hingegen auf die analytisch vorgegebenen Ausbreitungsbedingungen innerhalb einer einzelnen Flußröhre ein. Es ist daher sehr wahrscheinlich, daß aus diesem Grund die numerisch berechneten PWVs für einen verschwindenden $\hat{\sigma}$ -Wert nicht mit den gemessenen “hybriden” PWVs zur Deckung gebracht werden können. Gestützt wird diese Vermutung durch die deutlich variierenden Zeitreihen der die gemessenen PWVs charakterisierenden Legendre-Koeffizienten. Insofern stellt der scheinbar von null verschiedene positive $\hat{\sigma}$ -Wert ein starkes Indiz für unterschiedliche Ausbreitungsbedingungen in benachbarten Flußröhren im interplanetaren Medium dar.

Eine Aussage über sich innerhalb einer Flußröhre auf kleinen räumlichen Skalen ändernde Ausbreitungsbedingungen kann hingegen nicht getroffen werden, da die PWVs innerhalb der lokalen Umgebung über die Ausbreitungsbedingungen hinwegmitteln.

Anhang A

Die Berechnung von $G(\mu)$

Es folgt die Berechnung von $\lambda_{||}$ nach Gleichung (2.15) und $G(\mu)$ nach Gleichung (2.41) für eine Reihe von Fällen. Dabei wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Gleichung (2.41) $\mu_0 = 0$ gesetzt.

Berechnung von $\lambda_{||}$ und $G(\mu)$ für $\hat{q} < 2$ und $H = 0$:

$$\lambda_{||} = \frac{3}{2} \frac{v}{A} \frac{1}{(1 - \hat{\sigma}^2)(\hat{q} - 2)(\hat{q} - 4)} \quad (\text{A.1})$$

$$\Rightarrow \frac{v}{2AL} = \frac{1}{3}(1 - \hat{\sigma}^2)(\hat{q} - 2)(\hat{q} - 4) \frac{\lambda_{||}}{L} \quad (\text{A.2})$$

$$G(\mu) = \frac{4 - \hat{q}}{3} \frac{1 - \hat{\sigma}^2}{1 - \text{sign}(\mu)\hat{\sigma}} \frac{\lambda_{||}}{L} \text{sign}(\mu)|\mu|^{2-\hat{q}} \quad (\text{A.3})$$

Für den **Spezialfall** $\hat{q} = 1$ und $\hat{\sigma} = 0$ ergibt sich

$$G(\mu) = d \cdot \mu \quad \text{mit} \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_{||}}{L} \quad (\text{A.4})$$

so daß die Legendre-Koeffizienten g_{ns} analytisch berechnet werden können:

$$g_{0s} = \frac{(e^d + 1) \cdot (e^d - 1)}{2de^d} \quad (\text{A.5})$$

$$g_{1s} = \frac{3(e^{2d}(d-1) + d + 1)}{2d^2e^d} \quad (\text{A.6})$$

$$g_{2s} = \frac{5(e^{2d}(d^2 - 3d + 3) - d^2 - 3d - 3)}{2d^3e^d} \quad (\text{A.7})$$

$$g_{3s} = \frac{7(e^{2d}(d^3 - 6d^2 + 15d - 15) + d^3 + 6d^2 + 15d + 15)}{2d^4e^d} \quad (\text{A.8})$$

$$g_{4s} = \frac{9(e^{2d}(d^4 - 10d^3 + 45d^2 - 105d + 105) - d^4 - 10d^3 - 45d^2 - 105d - 105)}{2d^5e^d} \quad (\text{A.9})$$

Allgemein können die Legendre-Koeffizienten g_{ns}

$$g_{ns} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) \exp(G(\mu)) d\mu \quad (\text{A.10})$$

durch analytische Integration, numerische Integration oder durch Taylorentwicklung von

$$\exp(G(\mu)) \approx 1 + G(\mu) + \frac{1}{2} (G(\mu))^2 + \frac{1}{6} (G(\mu))^3 + \dots \quad (\text{A.11})$$

und anschließende analytische Integration (vgl. BEECK AND WIBBERENZ [1986]) berechnet werden.

Die Entwicklung in einer Taylorreihe bis zum quadratischen¹ Term ergibt:

$$g_{0s} = 1 + \frac{1}{3} \frac{\hat{q} - 4}{\hat{q} - 3} \hat{\sigma} \frac{\lambda_{||}}{L} - \frac{1}{18} \frac{(\hat{q} - 4)^2}{2\hat{q} - 5} (1 + \hat{\sigma}^2) \left(\frac{\lambda_{||}}{L} \right)^2 \quad (\text{A.12})$$

$$g_{1s} = \frac{\lambda_{||}}{L} - \frac{1}{6} \frac{(\hat{q} - 4)^2}{\hat{q} - 3} \hat{\sigma} \left(\frac{\lambda_{||}}{L} \right)^2 \quad (\text{A.13})$$

$$g_{2s} = \frac{5}{3} \frac{(\hat{q} - 2)(\hat{q} - 4)}{(\hat{q} - 3)(\hat{q} - 5)} \hat{\sigma} \frac{\lambda_{||}}{L} - \frac{5}{9} \frac{(\hat{q} - 2)(\hat{q} - 4)^2}{(2\hat{q} - 5)(2\hat{q} - 7)} (1 + \hat{\sigma}^2) \left(\frac{\lambda_{||}}{L} \right)^2 \quad (\text{A.14})$$

$$g_{3s} = \frac{7}{3} \frac{\hat{q} - 1}{\hat{q} - 6} \frac{\lambda_{||}}{L} - \frac{7}{36} \frac{(2\hat{q} - 3)(\hat{q} - 4)}{\hat{q} - 3} \hat{\sigma} \left(\frac{\lambda_{||}}{L} \right)^2 \quad (\text{A.15})$$

$$g_{4s} = 3 \frac{\hat{q}(\hat{q} - 2)(\hat{q} - 4)}{(\hat{q} - 3)(\hat{q} - 5)(\hat{q} - 7)} \hat{\sigma} \frac{\lambda_{||}}{L} - 2 \frac{(\hat{q} - 1)(\hat{q} - 2)(\hat{q} - 4)^2}{(2\hat{q} - 5)(2\hat{q} - 7)(2\hat{q} - 9)} (1 + \hat{\sigma}^2) \left(\frac{\lambda_{||}}{L} \right)^2 \quad (\text{A.16})$$

$$g_{5s} = \frac{11}{3} \frac{(\hat{q} - 1)(\hat{q} + 1)}{(\hat{q} - 6)(\hat{q} - 8)} \frac{\lambda_{||}}{L} - \frac{11}{72} \frac{(2\hat{q} - 1)(2\hat{q} - 3)(\hat{q} - 4)}{(\hat{q} - 3)(\hat{q} - 5)} \hat{\sigma} \left(\frac{\lambda_{||}}{L} \right)^2 \quad (\text{A.17})$$

Die Genauigkeit der Entwicklung nach Potenzen von $\lambda_{||}/L$ läßt sich z. B. für den Spezialfall $\hat{q} = 1$, d. h. anhand der Gleichungen (A.5)–(A.9), überprüfen.

Berechnung von $\lambda_{||}$ und $G(\mu)$ für $\hat{q} = 1.5$:

$$\lambda_{||} = \frac{3}{8} \frac{v}{A} \left[\frac{1}{1 + \hat{\sigma}} \left(-2(H_1^4 - 1) \left(1 + H_1 \ln \left(\frac{H_1}{1 + H_1} \right) \right) - \frac{2}{15} (3 + 5H_1^2) + H_1^3 + \frac{1}{2} H_1 \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{1 - \hat{\sigma}} \left(-2(H_2^4 - 1) \left(1 + H_2 \ln \left(\frac{H_2}{1 + H_2} \right) \right) - \frac{2}{15} (3 + 5H_2^2) + H_2^3 + \frac{1}{2} H_2 \right) \right] \quad (\text{A.18})$$

$$\text{mit } H_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H}{1 + \hat{\sigma}} \quad \text{und} \quad H_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H}{1 - \hat{\sigma}} \quad (\text{A.19})$$

Spezialfall $H = 0$:

$$\lambda_{||} = \frac{6}{5} \frac{v}{A} \frac{1}{1 - \hat{\sigma}^2} \quad (\text{A.20})$$

Aus Gleichung (A.18) ergibt sich

$$\frac{v}{2AL} = \frac{4}{3} \frac{\lambda_{||}}{L} [\dots]^{-1} \quad (\text{A.21})$$

¹Die Legendre-Koeffizienten wurden mit dem analytischen Rechenprogramm REDUCE berechnet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind hier nur die Legendre-Koeffizienten angegeben, die sich aus der Taylorreihenentwicklung $O(x^2)$ ergeben. Die in dieser Arbeit verwendeten Werte für die Legendre-Koeffizienten sind hingegen aus einer Taylorreihenentwicklung $O(x^5)$ hervorgegangen.

$$G(\mu) = 2D_1 \left(\sqrt{|\mu|} + H_3 \ln \left(\frac{H_3}{\sqrt{|\mu|} + H_3} \right) \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\text{mit } D_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{sign}(\mu) \frac{v}{2AL} \frac{1}{1 - \text{sign}(\mu)\hat{\sigma}} \quad H_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H}{1 - \text{sign}(\mu)\hat{\sigma}} \quad (\text{A.23})$$

$$\Rightarrow \exp(G(\mu)) = \exp \left(2D_1 \sqrt{|\mu|} \right) \left(\frac{H_3}{\sqrt{|\mu|} + H_3} \right)^{H_3} \quad (\text{A.24})$$

Die Legendre-Koeffizienten g_{ns} können somit analytisch² berechnet werden.

Berechnung von $\lambda_{||}$ und $G(\mu)$ für $\hat{q} = 2$:

$$\lambda_{||} = \frac{3}{8} \frac{v}{A} \left[\frac{1}{1 + \hat{\sigma}} \left(H_1 - \frac{1}{2} + (1 - H_1^2) \ln \left(\frac{1 + H_1}{H_1} \right) \right) + \frac{1}{1 - \hat{\sigma}} \left(H_2 - \frac{1}{2} + (1 - H_2^2) \ln \left(\frac{1 + H_2}{H_2} \right) \right) \right] \quad (\text{A.25})$$

$$G(\mu) = D_1 \ln \left(\frac{|\mu| + H_3}{H_3} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$\Rightarrow \exp(G(\mu)) = \left(\frac{|\mu| + H_3}{H_3} \right)^{D_1} \quad (\text{A.27})$$

Die Legendre-Koeffizienten g_{ns} können somit analytisch berechnet werden.

Berechnung von $\lambda_{||}$ und $G(\mu)$ für $\hat{q} = 3$:

$$\lambda_{||} = \frac{3}{8} \frac{v}{A} \left[\frac{1}{1 + \hat{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{H_1}} (1 + H_1) \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{H_1}} \right) + \frac{1}{1 - \hat{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{H_2}} (1 + H_2) \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{H_2}} \right) - \frac{2}{1 - \hat{\sigma}^2} \right] \quad (\text{A.28})$$

$$G(\mu) = D_1 \frac{1}{\sqrt{H_3}} \arctan \left(\frac{|\mu|}{\sqrt{H_3}} \right) \quad (\text{A.29})$$

Die Legendre-Koeffizienten g_{ns} müssen somit numerisch berechnet werden.

Berechnung von $\lambda_{||}$ und $G(\mu)$ für $\hat{q} = 4$:

$$\lambda_{||} = \frac{3}{8} \frac{v}{A} \left[-\frac{1}{6A^2(1 + \hat{\sigma})} \left(2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{A - 2}{\sqrt{3}A} \right) + (1 + 2A^2) \ln(A^2 - A + 1) + 2(A^2 - 1) \ln(A + 1) - 6A^2 \ln(A) - 2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) - \frac{1}{6B^2(1 - \hat{\sigma})} \left(2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{B - 2}{\sqrt{3}B} \right) + (1 + 2B^2) \ln(B^2 - B + 1) + 2(B^2 - 1) \ln(B + 1) - 6B^2 \ln(B) - 2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \right] \quad (\text{A.30})$$

²Es empfiehlt sich, die Berechnung mit einem analytischen Rechenprogramm wie z. B. REDUCE durchzuführen, da die Gleichungen für die Legendre-Koeffizienten g_{ns} recht umfangreich werden.

$$\text{mit } A \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{H_1} \quad \text{und} \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{H_2} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} G(\mu) = & -D_1 \frac{1}{3C^2} \left[\sqrt{3} \arctan \left(\frac{C - 2|\mu|}{\sqrt{3}C} \right) \right. \\ & \left. + \ln \left(\frac{\sqrt{C^2 - C|\mu| + \mu^2}}{A + |\mu|} \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\text{mit } C \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{H_3} \quad (\text{A.33})$$

Die Legendre-Koeffizienten g_{ns} müssen somit numerisch berechnet werden.

Anhang B

Die stetige Differenzierbarkeit von f

Die in Gleichung (2.48) durchgeführte Vertauschung von Integration und Differentiation

$$\int \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} dt \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int f(t, x) dt \quad (\text{B.1})$$

ist nur zulässig, wenn die Funktion f stetig ist und $\partial^2 f / \partial x^2$ existiert und stetig ist, d. h. wenn f zweimal stetig differenzierbar ist: man darf “unter dem Integral differenzieren” (siehe FORSTER [1984], S. 84ff); in diesem Zusammenhang wird auch von der Leibnizschen Regel gesprochen (siehe JOOS UND RICHTER [1985], S. 203f.).

Für den Fall der Transportgleichung (2.1) ist die Lösung $f(t, s, \mu)$ nicht bekannt, so daß die Stetigkeit und die stetige Differenzierbarkeit nicht direkt überprüft werden können. Dennoch können schon aufgrund der Struktur der Transportgleichung Aussagen über gewisse Eigenschaften der Lösung gemacht werden.

Bevor ein bemerkenswerter Satz von HÖRMANDER [1967] vorgestellt wird, ist es notwendig, einige Begriffe, die in diesem Satz erwähnt werden, zu erläutern. Die folgenden Definitionen und Sätze sind dem Lehrbuch von JACOB [1995] entnommen:

Mit $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, wird der lineare Raum aller m -mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnet. Es ist $C^\infty(\Omega)$ der Vektorraum aller *beliebig oft differenzierbaren* Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (siehe S. 26).

Satz 32.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $p \in \Omega$. Die Menge $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$ ist eine Basis des Vektorraums $T_p\Omega$. Der Vektorraum $T_p\Omega$ heißt nach Definition 32.3 *Tangentialraum* an Ω im Punkt p .

Satz 32.8 Es ist X genau dann ein *Vektorfeld* auf Ω , falls es C^∞ -Funktionen $a_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \quad (\text{B.2})$$

gibt.

Vektorfelder wirken auf C^∞ -Funktionen:

Für $f \in C^\infty(\Omega)$ ist $X_p f \in C^\infty(\Omega)$ durch

$$p \longmapsto (X_p f)(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial f(p)}{\partial x_j} \quad (\text{B.3})$$

definiert, d. h. Vektorfelder können als lineare partielle Differentialoperatoren erster Ordnung interpretiert werden.

Von besonderem Interesse sind die Differentialoperatoren der Gestalt

$$L(x, D) = \sum_{l=1}^m X_l^2 + X_0 \quad (\text{B.4})$$

mit Vektorfeldern X_l , $0 \leq l \leq m$.

Unter endlich vielen iterierten Kommutatoren der Vektorfelder X_0, \dots, X_m ist nach Gleichung (34.9) folgendes zu verstehen:

$$X_{j_1}, [X_{j_1}, X_{j_2}], [X_{j_1}, [X_{j_2}, X_{j_3}]], \dots, [X_{j_1}, [X_{j_2}, \dots [X_{j_{k-1}}, X_{j_k}] \dots]] \dots \quad (\text{B.5})$$

mit $j_i \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Satz 34.7

Voraussetzung:

Für alle Punkte $x \in \Omega$ gibt es eine endliche Anzahl $M = M(x)$ iterierter Kommutatoren der Vektorfelder X_0, \dots, X_m , die zusammen mit $\{X_0, \dots, X_m\}$ jeweils den Raum $T_x\Omega$ aufspannen.

Behauptung:

Dann ist der Operator $L(x, D)$ aus der Gleichung (B.4) in Ω hypoelliptisch, d. h. u muß eine C^∞ -Funktion in jeder offenen Menge Ω sein, in der $L(x, D)u$ eine C^∞ -Funktion ist.

Beweis:

Siehe HÖRMANDER [1967]; JACOB [1995], S. 298ff.

Gelingt es, die Transportgleichung in der Form

$$L(x, D)f = q(t, s, \mu) \quad (\text{B.6})$$

zu schreiben, wobei angenommen wird, daß die Quellfunktion $q(t, s, \mu)$ eine C^∞ -Funktion ist, was z. B. für die homogene Transportgleichung $q(t, s, \mu) = 0$ trivialerweise erfüllt ist, so kann bei erfüllter Voraussetzung des Satzes 34.7 gezeigt werden, daß die Lösung $f(t, s, \mu)$ der Differentialgleichung eine C^∞ -Funktion ist.

Zunächst ist die Transportgleichung in die Gestalt des Differentialoperators aus der Gleichung (B.4) zu überführen:

$$-C_1 \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) + C_2 (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} + C_3 \mu \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\Rightarrow (1 - \mu)(1 + \mu) \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} + \left(-2\mu - \frac{C_2}{C_1} (1 - \mu)(1 + \mu) \right) \frac{\partial f}{\partial \mu} - \frac{C_3}{C_1} \mu \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{1}{C_1} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Koordinatentransformation: $\mu = -x + 1$ und Multiplizieren mit x

$$\Rightarrow x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(2x \frac{1-x}{2-x} + \frac{C_2}{C_1} x^2 \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{C_3}{C_1} x \frac{1-x}{2-x} \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{1}{C_1} \frac{x}{2-x} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\Rightarrow \left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f + \left(2x \frac{1-x}{2-x} + \frac{C_2}{C_1} x^2 - x\right) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{C_3}{C_1} x \frac{1-x}{2-x} \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{1}{C_1} \frac{x}{2-x} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Vergleich mit der Gleichung (B.4) liefert:

$$X_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left(2x \frac{1-x}{2-x} + \frac{C_2}{C_1} x^2 - x\right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{C_3}{C_1} x \frac{1-x}{2-x} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{C_1} \frac{x}{2-x} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{B.11})$$

$$X_1 \stackrel{\text{def}}{=} x \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{B.12})$$

Für $x = 0$, d. h. $\mu = 1$, verschwinden die Vektorfelder X_0 und X_1 identisch. Es bleibt zu überprüfen, ob einer der iterierten Kommutatoren diese "Lücke" schließen kann. Bildet man zunächst den Kommutator von X_0 und X_1 , so folgt:

$$[X_0, X_1] = \left(\frac{2x^2}{(2-x)^2} - \frac{C_2}{C_1} x^2\right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{C_3}{C_1} \left(x \frac{1-x}{2-x} - \frac{x^2}{(2-x)^2}\right) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{2}{C_1} \frac{x}{(2-x)^2} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{B.13})$$

Auch dieses Vektorfeld verschwindet für $x = 0$, und es wird ersichtlich, daß auch weitere iterierte Kommutatoren keine Abhilfe schaffen. Dasselbe Problem ergibt sich für den Punkt $\mu = -1$, wobei in der oben angegebenen Rechnung die Koordinatentransformation: $\mu = x - 1$ anzuwenden ist.

Der Satz 34.7 ist in den Punkten $\mu = \pm 1$ nicht erfolgreich anzuwenden. Betrachtet man jedoch die Lösung der vereinfachten Transportgleichung mit $C_2 = C_3 = 0$, wie sie in Gleichung (2.37) vorgestellt wird, so scheint es keine Probleme in den Punkten $\mu = \pm 1$ zu geben. Den gleichen Eindruck erhält man, wenn man die stationäre Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen (siehe Gleichung (2.40)) betrachtet.

Erfolgreicher ist der Satz 34.7 hingegen in dem Punkt $x = 1$, d. h. $\mu = 0$, anzuwenden, da hier das Vektorfeld des Kommutators den vollständigen Tangentialraum aufspannt und nicht wie das X_0 -Vektorfeld seine $\partial/\partial s$ -Komponente einbüßt.

Mit dem Satz 34.7 kann somit bis auf die Punkte $\mu = \pm 1$ gezeigt werden, daß f eine C^∞ -Funktion ist.

Für den allgemeinen PWSK aus der Gleichung (2.21) gibt es jedoch Probleme mit dem Punkt $\mu = 0$, da zum einen die Betragsfunktion im Nullpunkt nicht differenzierbar ist und zum anderen für $\hat{q} > 1$ und $H = 0$ der Differentialoperator wie schon in den Punkten $\mu = \pm 1$ entartet. Zudem ergibt die sign-Funktion für $\hat{\sigma} \neq 0$ eine zusätzliche Schwierigkeit.

Nach dem Satz 32.7 müssen aber die a_j -Funktionen beliebig oft differenzierbar sein. Man erkennt schon an der stationären Lösung für konstante Ausbreitungsbedingungen (siehe Gleichung (2.40)), daß die Lösung in dem Punkt $\mu = 0$ im allgemeinen nicht stetig differenzierbar ist. Da bei der numerischen Lösung jedoch nur die $\tilde{a}_{i+1/2}$ -Koeffizienten nach der Gleichung (3.66) eingehen, die den vorgegebenen Verlauf des PWSK nach Gleichung (2.21) bereits hervorragend approximieren, wie aus der Abbildung 3.8 hervorgeht, soll hier angenommen werden, daß die $\tilde{a}_{i+1/2}$ -Koeffizienten von einem äquivalenten PWSK stammen, der auch in dem Punkt $\mu = 0$ stetig differenzierbar ist und keine Nullstelle aufweist.

Anhang C

Stabilität des μ -Transportes

Im folgenden wird ein Vergleich des Samarskij-Verfahrens mit dem Il'in-Verfahren und die Analyse ihres Stabilitätsverhaltens durchgeführt, da mir keine Literatur bekannt ist, auf die ich in diesem Zusammenhang verweisen könnte. Lediglich das sehr spezielle Buch von WINDISCH [1989] erwähnt das Problem auf S. 79, ohne es jedoch ausführlich zu erörtern.

Betrachtet man das folgende invers-monotone kontinuierliche Randwertproblem¹

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[b(x)y - D(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = f(x), \quad x \in (0, 1) \quad (\text{C.1})$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

so führt eine Diskretisierung auf den inneren Gitterpunkten mit einer Drei-Punkte-Approximation zu einem linearen Gleichungssystem der Gestalt

$$A\mathbf{y} = \mathbf{f} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \mathbf{y} &= (y_1, \dots, y_{N-1})^T & \text{mit } N &\in \mathbb{N} \\ \mathbf{f} &= (f_1, \dots, f_{N-1})^T \end{aligned}$$

und einer Koeffizientenmatrix A mit Tridiagonalgestalt.

Wichtig für die Stabilitätsuntersuchung ist, ob die Koeffizientenmatrix A eine M-Matrix ist (vgl. WINDISCH [1989], S. 63ff.). Soll die inverse Monotonie² des kontinuierlichen Randwertproblems ins Diskrete übertragen werden, so muß die Matrix A eine nichtsinguläre M-Matrix sein. Die Stabilität des Verfahrens ist dann gewährleistet.

Es seien zunächst einige Definitionen und ein Theorem aus WINDISCH [1989] vorangestellt:

¹Der μ -Transport ergibt sich durch die folgende Wahl

$$b(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1-x^2}{2L} \quad \text{und} \quad D(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda_{||}} \bar{\kappa}(x) > 0$$

im Wertebereich $x \in [-1, 1]$.

²Invers-monotone Operatoren werden in der Literatur auch als invers-isotone Operatoren bezeichnet (private Mitteilung, WINDISCH, 01.03.1996).

Definition 1.1

Eine Matrix $A = (a_{ij})$ wird als *schwach zeilen-diagonaldominant* bezeichnet, wenn

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad i, j \in [0, 1, \dots, N] \quad (\text{C.3})$$

und für mindestens ein i die strikte Ungleichung erfüllt ist.

Ist A^T schwach zeilen-diagonaldominant, dann wird A als *schwach spalten-diagonaldominant* bezeichnet.

Definition 2.3

Eine Matrix $A = (a_{ij})$ heißt *nichtsinguläre M-Matrix*, wenn

$$\det(A) \neq 0, \quad A^- = (a_{ij}^-) \geq 0 \quad \text{und} \quad a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{C.4})$$

Definition 2.9

Eine Matrix $A = (a_{ij})$ heißt *L-Matrix*, wenn

$$a_{ii} > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{C.5})$$

Aus Theorem 2.4 folgt unmittelbar: Jede nichtsinguläre M-Matrix ist eine L-Matrix. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Sei ferner $A = (a_{ij})$ eine Tridiagonalmatrix, d. h. $a_{ij} = 0$ für $|i - j| \geq 2$. Die Matrix A ist *irreduzibel*, wenn für die Nebendiagonalelemente a_{ij} , $i \neq j$ die strikte Ungleichung $a_{ij} < 0$ erfüllt ist.

Theorem 2.22

Sei A eine irreduzible L-Matrix, die schwach zeilen- oder spalten-diagonaldominant ist. Dann ist A eine nichtsinguläre M-Matrix.

Betrachtet man nun die i -te Zeile der Koeffizientenmatrix des Samarskij-Schemas³

$$a_{i,i-1} = -\frac{b_{i-1/2}}{\Delta x} - \tilde{\chi}_{i-1/2} \frac{a_{i-1/2}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{C.6})$$

$$a_{i,i} = \frac{b_{i+1/2}}{\Delta x} + \tilde{\chi}_{i-1/2} \frac{a_{i-1/2}}{(\Delta x)^2} + \tilde{\chi}_{i+1/2} \frac{a_{i+1/2}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{C.7})$$

$$a_{i,i+1} = -\tilde{\chi}_{i+1/2} \frac{a_{i+1/2}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{C.8})$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\chi}_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{i+1/2} (\coth(\rho_{i+1/2}) - \text{sign}(b_{i+1/2})) \quad \rho_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{b}\Delta x}{2\tilde{a}_{i+1/2}}$$

so ist sofort zu erkennen, daß die Koeffizientenmatrix eine irreduzible L-Matrix ist. Ist zusätzlich noch eine Diagonaldominanz bezüglich der Spalten bzw. Zeilen nachzuweisen, so ist die

³Im allgemeinen Fall ist $a_{i+1/2} = \tilde{a}_{i+1/2}$ und $b_{i+1/2} = \tilde{b}_{i+1/2}$ zu setzen. Für den μ -Transport gilt jedoch wegen des Separationsansatzes $a_{i+1/2} = (1 - x_{i+1/2}^2)\tilde{a}_{i+1/2}$ und $b_{i+1/2} = (1 - x_{i+1/2}^2)\tilde{b}_{i+1/2}$.

entsprechende Koeffizientenmatrix nach Theorem 2.22 eine nichtsinguläre M-Matrix, und das Verfahren ist somit stabil.

Die Überprüfung, ob schwache Diagonaldominanz bezüglich der Spalten besteht, führt zu der Ungleichung

$$\frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} \geq 0 \quad (\text{C.9})$$

die nur für $b'(x) \geq 0$ erfüllt ist.⁴

Es läßt sich hingegen schwache Diagonaldominanz bezüglich der Zeilen der Koeffizientenmatrix A nachweisen, womit gezeigt ist, daß das Verfahren stabil ist.

Betrachtet man die Grenzfälle für verschwindende Konvektion $b(x)$ und Diffusion $D(x)$, so zeigt sich folgendes Verhalten:

1. Im Fall verschwindender Konvektion $b(x)$ ergibt sich dieselbe Differenzenapproximation, wie in Gleichung (3.47) beschrieben, da

$$\lim_{\tilde{b} \rightarrow 0} \rho_{i+1/2} (\coth(\rho_{i+1/2}) - \text{sign}(b_{i+1/2})) = 1 \quad (\text{C.10})$$

2. Im Fall verschwindender Diffusion $D(x)$ ergibt sich das first-order-upwind- bzw. donor-cell-Verfahren, wie in den Gleichungen (3.39) und (3.40) beschrieben, da

$$\lim_{\tilde{a}_{i+1/2} \rightarrow 0} \rho_{i+1/2} \frac{a_{i+1/2}}{(\Delta x)^2} (\coth(\rho_{i+1/2}) - \text{sign}(b_{i+1/2})) = 0 \quad (\text{C.11})$$

Bildet man die i -ten Zeilen der Koeffizientenmatrix des Il'in-Schemas analog zu denen des Samarskij-Schemas, so folgt:

$$a_{i,i-1} = -\frac{b_{i-1/2}}{2\Delta x} - \tilde{\chi}_{i-1/2} \frac{a_{i-1/2}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{C.12})$$

$$a_{i,i} = \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{2\Delta x} + \tilde{\chi}_{i-1/2} \frac{a_{i-1/2}}{(\Delta x)^2} + \tilde{\chi}_{i+1/2} \frac{a_{i+1/2}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{C.13})$$

$$a_{i,i+1} = \frac{b_{i+1/2}}{2\Delta x} - \tilde{\chi}_{i+1/2} \frac{a_{i+1/2}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{C.14})$$

$$\text{mit } \tilde{\chi}_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{i+1/2} \coth(\rho_{i+1/2}) \quad \rho_{i+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{b}\Delta x}{2\tilde{a}_{i+1/2}}$$

Die Forderung nach irreduzibler L-Matrizeneigenschaft bedingt die Einhaltung der Ungleichung $a_{i,i+1} < 0$. Das Il'in-Schema ist aber durch die Einführung von künstlicher Diffusion so konstruiert, daß es diese Bedingungen erfüllt.

Wie schon für das Samarskij-Schema läßt sich auch für das Il'in-Schema schwache Diagonaldominanz bezüglich der Zeilen der Koeffizientenmatrix A nachweisen. Das Il'in-Schema ist somit stabil.

Betrachtet man die Grenzfälle für verschwindende Konvektion $b(x)$ und Diffusion $D(x)$, so zeigt sich dasselbe Verhalten wie für das Samarskij-Schema:

⁴Das ursprüngliche Samarskij-Verfahren ([SAMARSKIJ, 1984], S. 123) erhält man mit $b'(x) = 0$.

1. Im Fall verschwindender Konvektion $b(x)$ ergibt sich dieselbe Differenzenapproximation, wie in Gleichung (3.47) beschrieben, da

$$\lim_{\tilde{b} \rightarrow 0} \rho_{i+1/2} \coth(\rho_{i+1/2}) = 1 \quad (\text{C.15})$$

2. Im Fall verschwindender Diffusion $D(x)$ ergibt sich das first-order-upwind- bzw. donor-cell-Verfahren, wie in den Gleichungen (3.39) und (3.40) beschrieben, da

$$\lim_{\tilde{a}_{i+1/2} \rightarrow 0} \rho_{i+1/2} \frac{a_{i+1/2}}{(\Delta x)^2} \coth(\rho_{i+1/2}) = \frac{|b_{i+1/2}|}{2\Delta x} \quad (\text{C.16})$$

Zum Schluß soll noch darauf hingewiesen werden, daß aus der nichtsingulären M-Matrizeigenschaft der Koeffizientenmatrix A des elliptischen Operators unmittelbar (vgl. WINDISCH [1989], S. 90ff.) die nichtsinguläre M-Matrizeigenschaft der Koeffizientenmatrix B aus der Gleichung (3.36) des μ -Transportes (parabolisches Problem) folgt.

Anhang D

Die stationäre Anisotropie ξ_{1s}

In diesem Anhang sind entsprechend der Abbildung 6.2 stationäre Anisotropien ξ_{1s} für die Sonnenwindgeschwindigkeiten $v_{sw} = 200$ km/s (Abbildung D.1), $v_{sw} = 300$ km/s (Abbildung D.2), $v_{sw} = 500$ km/s (Abbildung D.3) und $v_{sw} = 600$ km/s (Abbildung D.4) dargestellt.

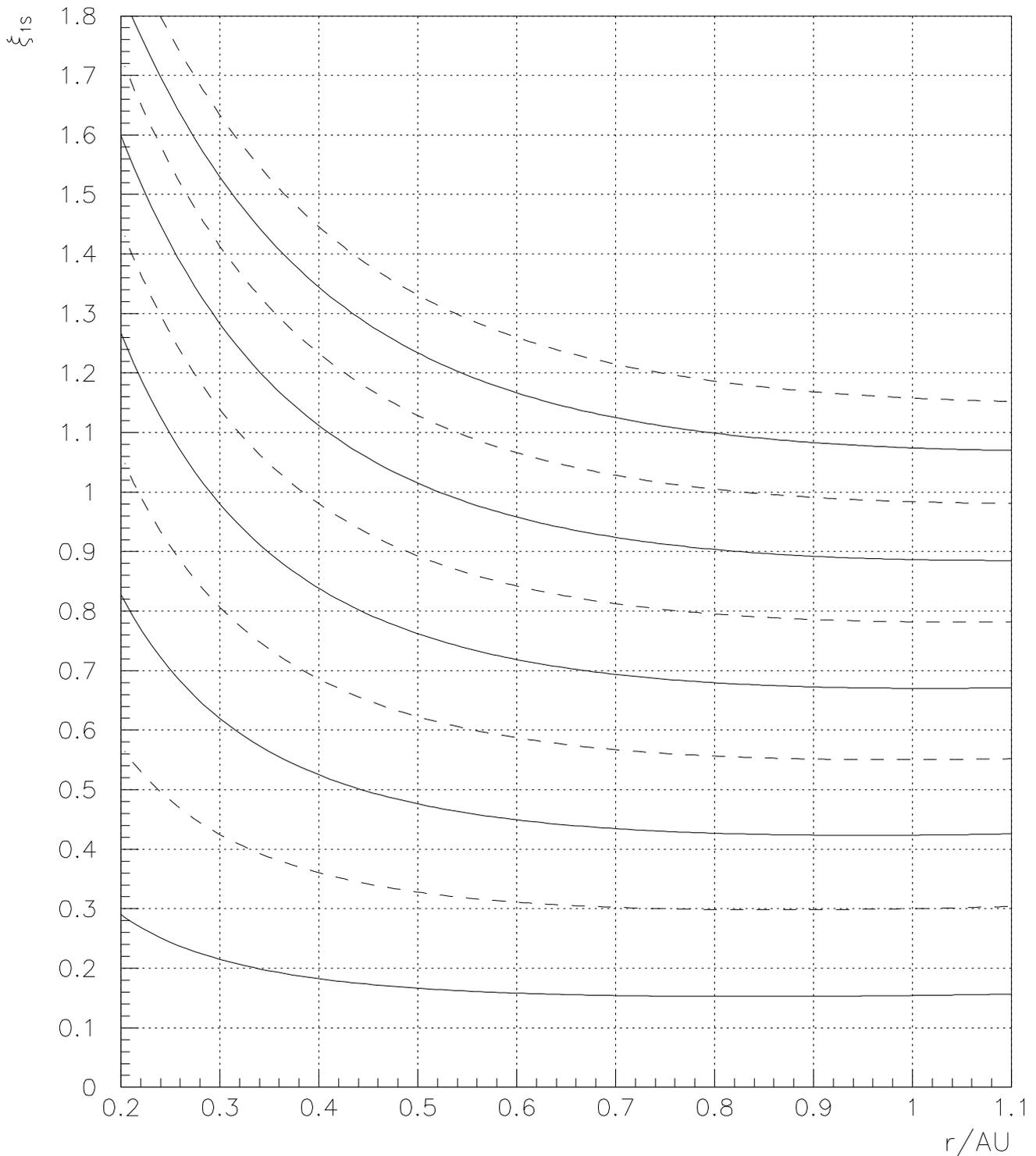


Abbildung D.1: Die stationäre Anisotropie ξ_{1s} ist für unterschiedliche als konstant angenommene radiale mittlere freie Weglängen λ_r über dem radialen Abstand aufgetragen. Die Abstufung der radialen mittleren freien Weglängen erfolgt in Schritten von 0.05 AU mit einem minimalen Wert von $\lambda_r = 0.05$ AU (untere durchgezogene Kurve) und einem maximalen Wert von $\lambda_r = 0.5$ AU (obere gestrichelte Kurve). Die Sonnenwindgeschwindigkeit beträgt $v_{\text{sw}} = 200$ km/s; der PWSK hat die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

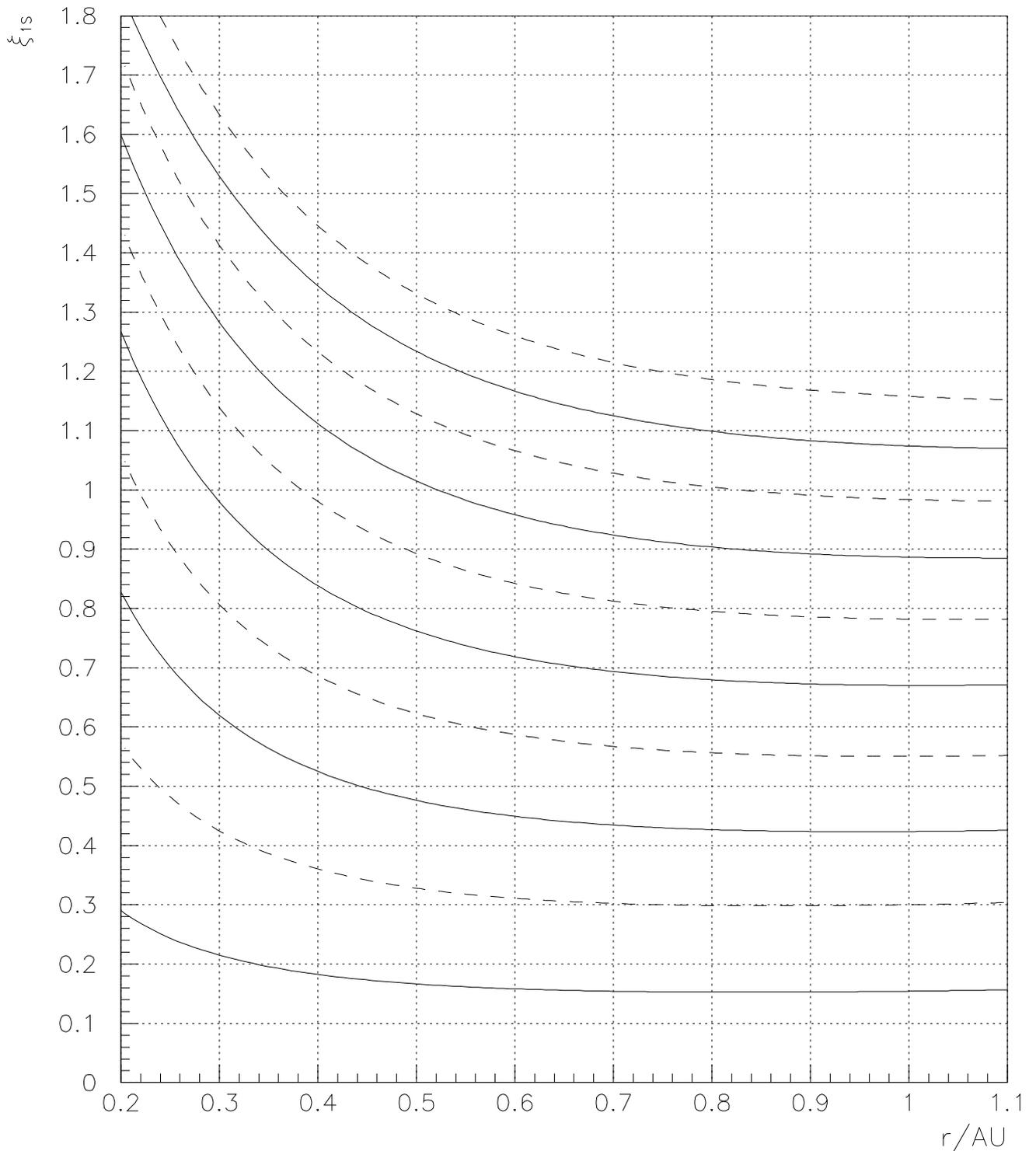


Abbildung D.2: Die stationäre Anisotropie ξ_{1s} ist für unterschiedliche als konstant angenommene radiale mittlere freie Weglängen λ_r über dem radialen Abstand aufgetragen. Die Abstufung der radialen mittleren freien Weglängen erfolgt in Schritten von 0.05 AU mit einem minimalen Wert von $\lambda_r = 0.05$ AU (untere durchgezogene Kurve) und einem maximalen Wert von $\lambda_r = 0.5$ AU (obere gestrichelte Kurve). Die Sonnenwindgeschwindigkeit beträgt $v_{sw} = 300$ km/s; der PWSK hat die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

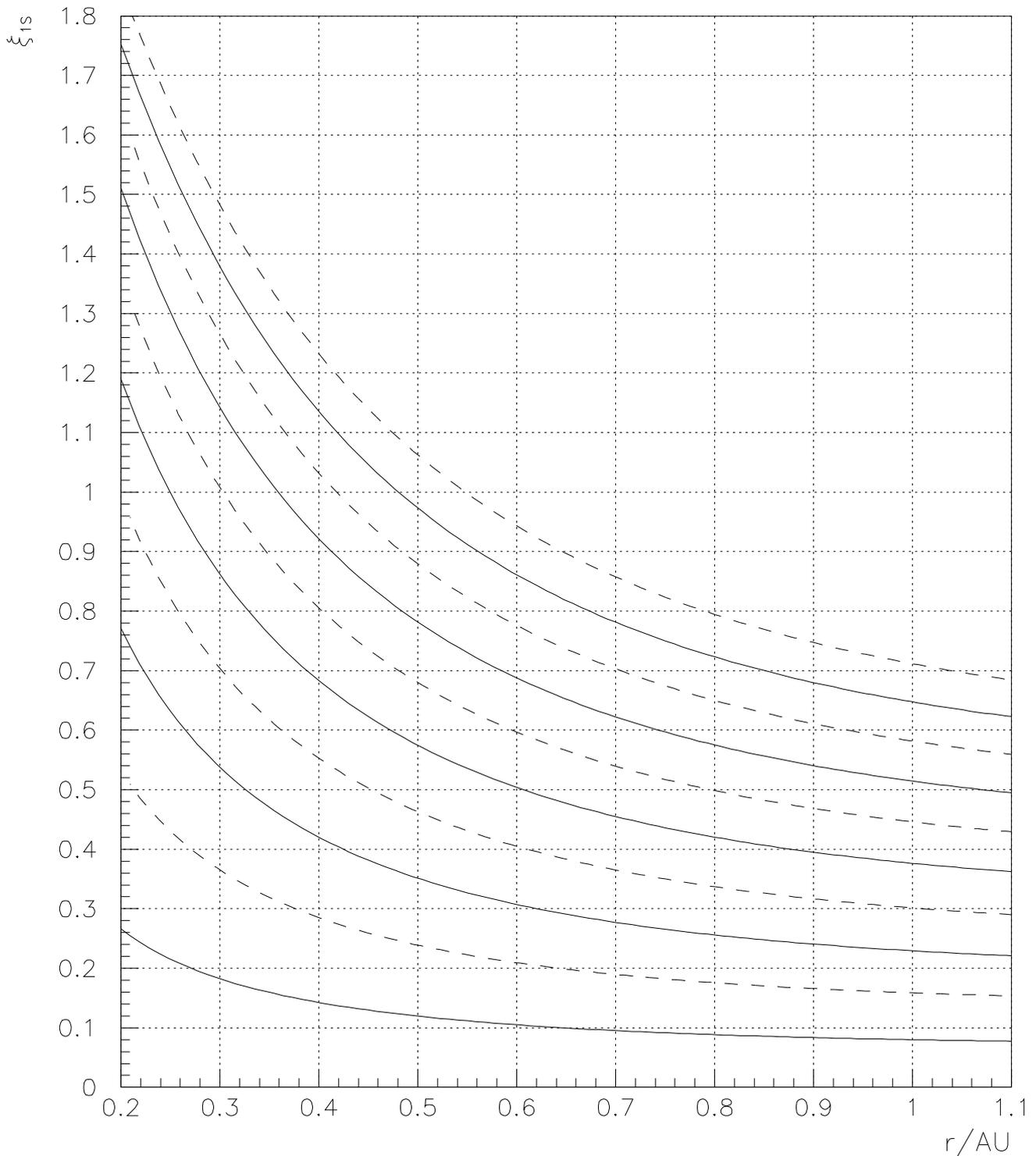


Abbildung D.3: Die stationäre Anisotropie ξ_{1s} ist für unterschiedliche als konstant angenommene radiale mittlere freie Weglängen λ_r über dem radialen Abstand aufgetragen. Die Abstufung der radialen mittleren freien Weglängen erfolgt in Schritten von 0.05 AU mit einem minimalen Wert von $\lambda_r = 0.05$ AU (untere durchgezogene Kurve) und einem maximalen Wert von $\lambda_r = 0.5$ AU (obere gestrichelte Kurve). Die Sonnenwindgeschwindigkeit beträgt $v_{\text{sw}} = 500$ km/s; der PWSK hat die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

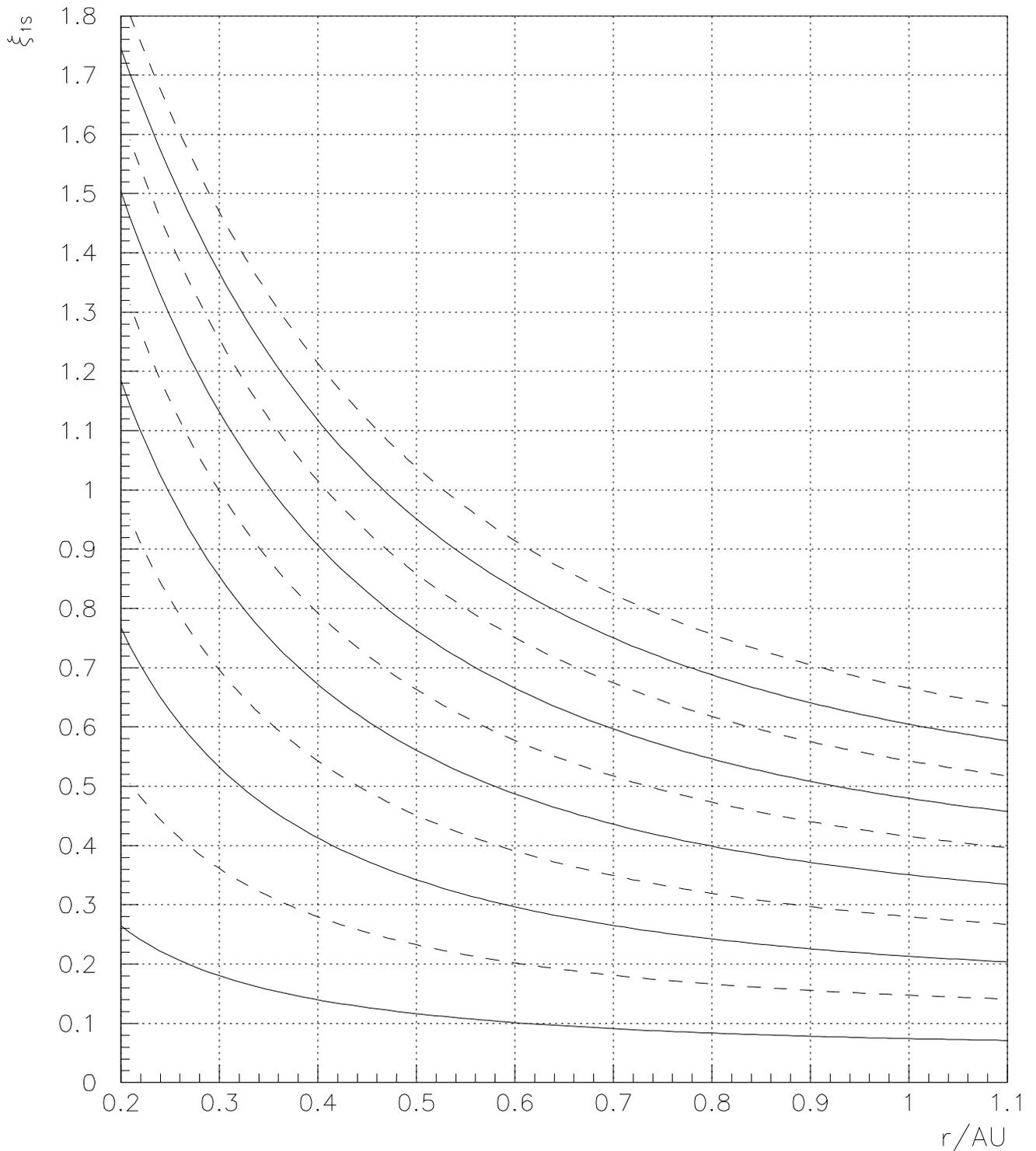


Abbildung D.4: Die stationäre Anisotropie ξ_{1s} ist für unterschiedliche als konstant angenommene radiale mittlere freie Weglängen λ_r über dem radialen Abstand aufgetragen. Die Abstufung der radialen mittleren freien Weglängen erfolgt in Schritten von 0.05 AU mit einem minimalen Wert von $\lambda_r = 0.05 \text{ AU}$ (untere durchgezogene Kurve) und einem maximalen Wert von $\lambda_r = 0.5 \text{ AU}$ (obere gestrichelte Kurve). Die Sonnenwindgeschwindigkeit beträgt $v_{\text{sw}} = 600 \text{ km/s}$; der PWSK hat die Parameter $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$.

Anhang E

Die solaren Ereignisse

Allgemeine Bemerkungen zu den Tabellen:

- Der radiale Abstand r von der Sonne wird zu Beginn des Ereignisses gemessen.
- Die Sonnenwindgeschwindigkeit \bar{v}_{sw} ist als Mittelwert über das gesamte Ereignis zu verstehen. Der Wert in Klammern gibt die Sonnenwindgeschwindigkeit zu Beginn des Ereignisses an.
- Die Werte der radialen mittleren freien Weglänge λ_r sind in AU (AU = Astronomical Unit; $\approx 150 \cdot 10^6$ km) angegeben und sind alle für einen PWSK mit $\hat{q} = 1.6$, $H = 0$ und $\hat{\sigma} = 0$ bestimmt worden.
- Der g_{0s} -Koeffizient ist proportional zur Anzahl/(MeV·sr·cm²). Das Vorzeichen der Anisotropie erster und dritter Ordnung ist an die Richtung des mittleren Magnetfeldes gekoppelt. Strömen die Teilchen in Richtung des Magnetfeldes, so ist die Anisotropie positiv. Zum Vergleich mit den Lösungen der Transportgleichung sind die Beträge der Anisotropie erster und dritter Ordnung zu verwenden. Die Bestimmung der Anisotropie vierter Ordnung ξ_{4s} ist aus meßtechnischen Gründen unvollständig (siehe Abschnitt 6.1); von einer Auswertung wird daher abgeraten.
- Die aufgeführten Schocks stammen aus der Schockliste von R. Schwenn (private Mitteilung).

E.1 22. Dezember (doy 356) 1974 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.973 AU
Sonnenwindgeschwindigkeit: 550 (616) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
P4	0.045	-0.674	0.246	-0.016	–	0.450	–	–
P13	0.001	-0.622	–	–	–	0.425	–	–

E.2 25. Dezember (doy 359) 1974 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.966 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 450 (486) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	0.424	-0.083	0.038	–	–	0.050	–	–

E.3 28. Juli (doy 209) 1975 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.860 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 550 (539) km/s
 Schock: doy 210.9583

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	189.800	0.210	0.047	-0.040	0.012	0.125	1.35	0.3	
E08	3.545	0.223	0.042	-0.035	0.008	0.125	1.35	0.2	
P4	1.378	0.443	0.120	-0.061	-0.043	0.275	1.35	0.2	★1
P13	0.151	0.371	0.077	-0.085	0.022	0.225	1.50	0.2	
P27	0.041	0.338	0.014	-0.068	0.040	0.200	–	–	★2
A2	0.689	0.634	0.207	-0.042	–	0.400	1.35	0.2	
A4	0.099	0.579	0.144	-0.090	-0.057	0.375	1.50	0.1	
A13	0.009	0.553	0.055	-0.123	–	0.350	–	–	★2

★1: Der Kanal ist durch übersprechende Elektronen kontaminiert.

★2: Der statistische Fehler der Zählraten für diesen Kanal ist groß.

E.4 1. August (doy 213) 1975 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.829 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (414) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	6.164	-0.274	0.059	0.051	0.002	0.125	1.45	0.3
P4	0.032	-0.801	0.402	-0.069	0.060	0.400	–	–

E.5 28. März (doy 88) 1976 HELIOS 2

Radialer Abstand: 0.495 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (379) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	34.21	-0.582	0.227	0.100	-0.070	0.225	1.50	0.4	
E08	0.770	-0.573	0.196	0.129	-0.106	0.225	1.60	0.4	
P4	1.003	-0.659	0.251	0.128	-0.083	0.250	1.55	0.4	
P13	0.074	-0.677	0.280	0.153	-0.200	0.250	1.65	–	
P27	0.013	-0.730	0.233	0.092	-0.019	0.275	–	–	★1
A2	0.294	-0.597	0.225	0.086	0.039	0.225	1.50	0.4	
A4	0.027	-0.741	0.270	0.173	-0.201	0.275	1.65	0.4	★1

★1: Der statistische Fehler der Zählraten für diesen Kanal ist groß.

E.6 30. April (doy 121) 1976 HELIOS 2

Radialer Abstand: 0.419 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 450 (319) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	5.377	-0.058	0.032	-0.042	–	0.025	–	–	
E08	0.318	-0.109	0.006	–	–	0.025	–	–	★1
P4	0.165	-0.075	0.007	0.028	–	0.025	–	–	★2
P13	0.022	-0.113	-0.052	–	–	0.050	–	–	★1
P27	0.005	-0.132	–	–	–	0.050	–	–	★1

★1: Der statistische Fehler der Zählraten für diesen Kanal ist groß.

★2: Der Kanal ist durch übersprechende Elektronen kontaminiert.

E.7 6. Dezember (doy 340) 1977 HELIOS 2

Radialer Abstand: 0.754 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (319) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	0.589	-0.464	0.185	0.060	–	0.200	–	–
P4	0.032	-0.616	0.480	-0.241	0.021	0.300	–	–

E.8 13. Februar (doy 44) 1978 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.953 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 400 (402) km/s
 Schock: doy 46.0625

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	1268	-0.090	–	–	–	0.050	–	–	★1
P13	5.146	-0.191	–	–	–	0.100	–	–	
P27	0.248	-0.198	–	–	–	0.100	–	–	

★1: Der Kanal ist durch übersprechende Protonen kontaminiert.

Bemerkung: Das Ereignis ist stark schockbeeinfluß; nur eingeschränkt auswertbar!

E.9 11. April (doy 101) 1978 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.474 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 500 (476) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	19.180	-0.038	0.025	-0.005	0.001	0.025	–	–
E08	0.741	-0.054	-0.002	0.001	–	0.025	–	–

E.10 11. April (doy 101) 1978 HELIOS 2

Radialer Abstand: 0.487 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 500 (439) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	71.950	-0.050	-0.004	0.009	-0.001	0.025	–	–
E08	2.671	-0.077	-0.012	0.000	0.011	0.025	–	–
P13	0.272	-0.075	0.010	0.004	-0.007	0.025	–	–
P27	0.067	-0.086	0.010	0.030	0.011	0.025	–	–
A2	0.117	-0.084	0.021	–	–	0.025	–	–

E.11 23. Mai (doy 143) 1979 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.370 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (454) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
P4	0.094	-0.652	0.303	-0.011	-0.176	0.200	–	–
P13	0.002	-0.636	0.379	–	–	0.200	–	–
A2	0.584	-0.949	0.462	-0.014	0.026	0.300	–	–
A4	0.022	-0.718	0.355	–	–	0.225	–	–

E.12 27. Oktober (doy 300) 1979 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.562 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 250 (265) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	1.738	0.537	0.175	0.027	0.020	0.175	–	–
P4	0.106	0.788	0.566	0.099	-0.273	0.275	–	–
P13	0.009	0.790	0.367	–	–	0.275	–	–

E.13 27. Oktober (doy 300) 1979 HELIOS 2

Radialer Abstand: 0.403 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (346) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
P13	0.007	-0.230	0.128	0.023	0.069	0.075	-	-

E.14 27. November (doy 331) 1979 HELIOS 2

Radialer Abstand: 0.484 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (350) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	4.783	-0.067	-0.002	-0.021	0.000	0.025	-	-	★1
P4	0.188	-0.230	0.049	-0.026	-	0.075	-	-	

★1: Der Kanal ist durch übersprechende Protonen kontaminiert.

E.15 19. Dezember (doy 353) 1979 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.604 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 300 (287) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	388.976	-0.195	-0.002	0.010	0.011	0.075	-	-	★1
E08	18.292	-0.207	-0.008	0.020	0.000	0.075	-	-	★1
A2	0.255	-0.364	0.038	0.016	-0.101	0.150	-	-	★2
A4	0.033	-0.346	0.072	-0.006	-	0.150	-	-	★2

★1: Das Ereignis wird im Maximum durch eine Datenlücke unterbrochen.

★2: Der statistische Fehler der Zählraten für diesen Kanal ist groß.

E.16 25. März (doy 85) 1980 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.911 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (328) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	2.660	0.436	0.046	-0.219	-0.002	0.200	-	-
E08	0.119	0.327	0.297	-	-	0.150	-	-
P4	0.154	0.594	0.128	-0.113	-0.010	0.300	1.5	0.2
P13	0.020	0.523	-0.077	-0.177	-	0.250	-	-
P27	0.003	0.521	-	-	-	0.250	-	-

E.17 26. April (doy 117) 1980 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.654 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 400 (407) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	3.842	0.202	–	–	–	0.100	–	–	
P4	0.084	0.360	–	–	–	0.175	–	–	
P13	0.003	0.520	–	–	–	0.250	–	–	★1

★1: Der statistische Fehler der Zählraten für diesen Kanal ist groß.

Bemerkung: Die Plasmatdaten weisen auf Störungen der Magnetfeldtopologie hin; nur eingeschränkt auswertbar!

E.18 21. Mai (doy 142) 1980 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.345 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (316) km/s
 Schock: doy 143.8729

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	6.683	0.033	0.024	-0.024	0.005	0.025	–	–	
E08	0.347	0.043	0.037	0.007	-0.002	0.025	–	–	
P4	0.335	0.291	0.116	-0.057	-0.029	0.075	1.55	0.5	

Bemerkung: Das Ereignis hat Mehrfachinjektionen.

E.19 28. Mai (doy 149) 1980 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.310 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 250 (239) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	460.786	-0.606	0.244	0.043	0.017	0.150	1.45	0.4	
E08	10.371	-0.570	0.064	0.140	0.049	0.150	1.65	0.2	
P4	3.525	-1.253	1.035	-0.492	0.113	0.350	–	–	★1
P13	0.136	-1.250	0.862	-0.264	0.145	0.350	1.5	0.4	
P27	0.020	-1.210	–	–	–	0.325	–	–	★2
A2	7.472	-1.372	1.151	-0.546	0.207	0.400	1.5	0.3	
A4	0.538	-1.316	1.033	-0.469	-0.073	0.375	1.5	0.4	
A13	0.025	-1.201	–	–	–	0.325	–	–	

★1: Der Kanal ist durch übersprechende Elektronen kontaminiert.

★2: Der statistische Fehler der Zählraten für diesen Kanal ist groß.

E.20 21. Juni (doy 173a) 1980 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.545 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 400 (425) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
P4	17.390	0.490	–	–	–	0.225	–	–	*1 *2
P13	0.938	0.507	–	–	–	0.225	–	–	*2
P27	0.184	0.469	–	–	–	0.200	–	–	*2

*1: Fehlerhaftes Ergebnis durch Überlaufen des Zählers.

*2: Das Ereignis wird zu Beginn durch eine Datenlücke unterbrochen.

Bemerkung: Kurz vor dem Ereignis ist eine CME über den Beobachter hinwegelaufen; nur eingeschränkt auswertbar!

E.21 21. Juni (doy 173b) 1980 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.545 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 400 (425) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	163.400	0.232	0.100	-0.019	-0.020	0.100	1.25	0.5
E08	3.372	0.308	0.130	-0.051	-0.023	0.125	1.40	0.5
P4	0.383	0.387	0.112	-0.022	-0.036	0.175	–	–

Bemerkung: Das Ereignis hat einen hohen Untergrund.

E.22 6. August (doy 219) 1980 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.932 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (328) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	929.7	0.209	–	–	–	0.100	–	–
P4	122.6	0.348	–	–	–	0.175	–	–
P13	11.65	0.343	–	–	–	0.175	–	–
P27	1.742	0.312	–	–	–	0.150	–	–

Bemerkung: Das ereignis ist von starken Störungen im Magnetfeld begleitet; nur eingeschränkt auswertbar!

E.23 10. Juni (doy 161) 1981 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.317 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 300 (236) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	5.392	-0.226	0.101	0.047	-0.019	0.050	1.45	0.4	
E08	0.145	-0.288	–	–	–	0.075	–	–	★1

★1: Der statistische Fehler der Zählraten für diesen Kanal ist groß.

E.24 18. Juni (doy 169) 1981 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.330 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 400 (411) km/s
 Schock: doy 170.0451

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	0.157	-0.173	0.155	-0.005	-0.123	0.050	–	–	★1

★1: Der statistische Fehler der Zählraten für diesen Kanal ist groß.

Bemerkung: Die Datenüberdeckung beträgt nur $\approx 75\%$.

E.25 19. November (doy 323) 1981 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.641 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 400 (387) km/s
 Schock: doy 324.0375
 Schock: doy 324.5243

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$	
E03	41.260	-0.348	-0.015	0.060	0.149	0.175	–	–	★1
P4	8.150	-1.063	0.306	0.075	-0.039	0.550	1.50	-0.2	
P13	0.697	-0.915	0.169	0.164	-0.038	0.475	1.65	-0.2	★1
A2	0.289	-0.888	0.632	0.059	–	0.475	–	–	
A4	0.031	-1.254	0.484	0.048	–	0.650	–	–	

★1: Es befindet sich eine Datenlücke am Anfang des Ereignisses.

Bemerkung: Die geringe Anisotropie ξ_{2s} läßt darauf schließen, daß die Magnetfeldtopologie gestört zu sein scheint. In den Magnetfeld- und Plasmatdaten ist hierfür aber kein Hinweis zu finden. Das Ereignis wird daher in die Auswertung mit aufgenommen.

E.26 20. November (doy 324) 1981 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.624 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 500 (582) km/s
 Schock: doy 324.0375

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	16.374	-0.058	-0.002	-0.003	0.005	0.025	-	-
E08	0.287	-0.051	0.005	-0.057	-0.008	0.025	-	-

E.27 5. Dezember (doy 339) 1981 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.436 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 350 (344) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	5.450	-0.002	0.014	0.005	-0.009	0.025	-	-

E.28 3. Februar (doy 34) 1983 HELIOS 1

Radialer Abstand: 0.623 AU
 Sonnenwindgeschwindigkeit: 500 (524) km/s

Kanal	g_{0s}	ξ_{1s}	ξ_{2s}	ξ_{3s}	ξ_{4s}	λ_r	\hat{q}	$\hat{\sigma}$
E03	24.251	-0.067	-0.015	0.000	0.002	0.025	-	-

Literaturverzeichnis

ABRAMOWITZ, M. AND STEGUN, I.A. (Eds.), 1972: Handbook of Mathematical Functions. 9th ed. New York: Dover Publications.

ACHATZ, U., Dröge, W., Schlickeiser, R., and Wibberenz, G., 1993: Interplanetary Transport of Solar Electrons and Protons: Effect of Dissipative Processes in the Magnetic Field Power Spectrum. *Journal of Geophysical Research*, **98** (A8): 13261-13280.

ANDERSON, D.A., TANNEHILL, J.C., AND PLETCHER, R.H., 1984: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. In: Minkowycz, W.J. and Sparrow, E.M. (Eds.): *Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.

ANDERSON, J.D., Degrez, G., Dick, E., and Grundmann, R., 1992: Computational Fluid Dynamics. In: Wendt, J.F. (Ed.): *A von Karman Institute Book*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

BEECK, J., 1983: *Pitchwinkelverteilungen energiereicher geladener Teilchen: Ihr Verhalten in Abhängigkeit von interplanetaren Ausbreitungsparametern und ihre Auswertung bei an Bord von HELIOS 1 und 2 gemessenen solaren Ereignissen*. Diplomarbeit. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

BEECK, J., 1987: *Die interplanetare Ausbreitung geladener Teilchen analysiert anhand von Intensitätsmessungen der Raumfahrzeuge HELIOS, VOYAGER und ISEE*. Dissertation. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

BEECK, J. AND WIBBERENZ, G., 1986: Pitch Angle Distributions of Solar Energetic Particles and the Local Scattering Properties of the Interplanetary Medium. *The Astrophysical Journal*, **311**: 437–450.

BEECK, J. AND WIBBERENZ, G., 1987: Pitch Angle Distributions of Energetic Particles During Solar Events. *20th International Cosmic Ray Conference, Moskow*, **3**: 147–150.

BEECK, J. AND WIBBERENZ, G., 1990: The Local Scattering Properties of the Interplanetary Medium: Evidence for Helicity of the Magnetic Field? *21st International Cosmic Ray Conference, Adelaide*, **5**: 249.

BEECK, J., Mason, G.M., Hamilton, D.C., Wibberenz, G., Kunow, H., Hovestadt, D., and Klecker, B., 1987: A Multispacecraft Study of the Injection and Transport of Solar Energetic Particles. *The Astrophysical Journal*, **322**: 1052–1072.

BIALK, M., 1991: *Übersprechkorrektur der Elektronen- und Protonenkanäle des Kieler Experiments an Bord der Raumsonden HELIOS 1 und 2*. Diplomarbeit. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

- BIEBER, J.W., 1977: *Numerical and Analytic Solutions of the Boltzmann Equation for Cosmic Ray Transport*. Ph. D. Thesis. University of Maryland Department of Physics and Astronomy.
- BIEBER, J.W., 1996: A Useful Relationship between Time-Dependent and Steady-State Solutions of the Boltzmann Equation. *Journal of Geophysical Research*, **101** (A6): 13523–13526.
- BIEBER, J.W. AND POMERANTZ, M.A., 1985: Magnetic Fluctuations and Cosmic Ray Diurnal Variations. *19th International Cosmic Ray Conference, La Jolla*, **5**: 159–162.
- BIEBER, J.W. AND MATTHAEUS, W.H., 1991: Cosmic Ray Pitch Angle Scattering in Dynamic Magnetic Turbulence. *22nd International Cosmic Ray Conference, Dublin*, **3**: 248–251.
- BIEBER, J.W., EARL, J.A., GREEN, G., KUNOW, H., MÜLLER-MELLIN, R., and WIBBERENZ, G., 1979: Interpretation and Analysis of Solar Energetic Particle Intensities and Anisotropies Observed Aboard Helios 2 on 28 March 1976. In: Rycroft, M.J. (Ed.): *Space Research*. Vol. 19. Oxford, New York, Tokyo: Pergamon Press: 403–406.
- BIEBER, J.W., EARL, J.A., GREEN, G., KUNOW, H., MÜLLER-MELLIN, R., and WIBBERENZ, G., 1980: Interplanetary Pitch Angle Scattering and Coronal Transport of Solar Energetic Particles: New Information from Helios. *Journal of Geophysical Research*, **85** (A5): 2313–2323.
- BIEBER, J.W., EVENSON, P.A., AND POMERANTZ, M.A., 1986: Focusing Anisotropy of Solar Cosmic Rays. *Journal of Geophysical Research*, **91** (A8): 8713–8724.
- BIEBER, J.W., EVENSON, P.A., AND MATTHAEUS, W.H., 1987A: Magnetic Helicity of the Parker Field. *The Astrophysical Journal*, **315**: 700–705.
- BIEBER, J.W., EVENSON, P.A., AND MATTHAEUS, W.H., 1987B: Magnetic Helicity of the IMF and the Solar Modulation of Cosmic Rays. *Geophysical Research Letters*, **14** (8): 864–867.
- BIEBER, J.W., MATTHAEUS, W.H., SMITH, C.W., WANNER, W., KALLENRODE, M.-B., and WIBBERENZ, G., 1994: Proton and Electron Mean Free Paths: The Palmer Consensus Revisited. *The Astrophysical Journal*, **420**: 294–306.
- BIEBER, J.W., WANNER, W., AND MATTHAEUS, W.H., 1996: Dominant Two-Dimensional Solar Wind Turbulence with Implications for Cosmic Ray Transport. *Journal of Geophysical Research*, **101** (A2): 2511–2522.
- BOOK, D.L., BORIS, J.P., AND HAIN, K., 1975: Flux-Corrected Transport II: Generalizations of the Method. *Journal of Computational Physics*, **18**: 248–283.
- BORIS, J.P. AND BOOK, D.L., 1973: Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm that Works. *Journal of Computational Physics*, **11**: 38–69.
- BRONSTEIN, I.N., SEMENDJAJEW, K.A., MUSIOL, G., und MÜHLIG, H., 1993: *Taschenbuch der Mathematik*. Thun, Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- BRUNO, R. AND DOBROWOLNY, M., 1986: Spectral Measurements of Magnetic Energy and Magnetic Helicity between 0.29 and 0.97 AU. *Annales Geophysicae*, **4**: 17–22.
- CHANDRASEKHAR, S., 1943: Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics*, **15** (1): 1–89.

- COMPTON, A.H. AND GETTING, I.A., 1935: An Apparent Effect of Galactic Rotation on the Intensity of Cosmic Rays. *The Physical Review*, **47** (11): 817–821.
- DAVILA, J.M. AND SCOTT, J.S., 1984: The Interplanetary Scattering Mean Free Path: Collisionless Wave-Damping Effects. *The Astrophysical Journal*, **285**: 400–410.
- DRÖGE, W., 1994: Transports of Solar Energetic Particles. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **90**: 567–576.
- DRÖGE, W., Achatz, U., Wanner, W., Schlickeiser, R., and Wibberenz, G., 1993: Quasi-Linear Theory and the Phenomenology of Interplanetary Solar Particle Transport. *The Astrophysical Journal*, **407**: L95–L98.
- EARL, J.A., 1974: Coherent Propagation of Charged-Particle Bunches in Random Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal*, **188**: 379–397.
- EARL, J.A., 1976: The Effect of Adiabatic Focusing Upon Charged-Particle Propagation in Random Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal*, **205**: 900–919.
- EARL, J.A., 1981: Analytical Description of Charged Particle Transport Along Arbitrary Guiding Field Configurations. *The Astrophysical Journal*, **251**: 739–755.
- EARL, J.A., 1985: Numerical and Analytic Descriptions of Cosmic-Ray Transport. *19th International Cosmic Ray Conference, La Jolla*, **4**: 380–383.
- EARL, J.A., 1987: Charged Particle Transport Calculations on the Massively Parallel Processor. *20th International Cosmic Ray Conference, Moskow*, **3**: 198–201.
- EARL, J.A., 1989: The Effect of Dispersion Upon Charged Particle Transport in Random Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal*, **343**: 936–945.
- EARL, J.A., 1992: Effect of Magnetic Helicity Upon Retilinear Propagation of Charged Particles in Random Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal*, **395**: 185–191.
- EARL, J.A., 1994: New Description of Charged Particle Propagation in Random Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal*, **425**: 331–342.
- EARL, J.A., Ruffolo, D., Pauls, H.L., and Bieber, J.W., 1995: Comparison of Three Numerical Treatments of Charged Particle Transport. *The Astrophysical Journal*, **454**: 749–761.
- FARLOW, S.J., 1993: *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York: Dover Publications.
- FERMI, E., 1949: On the Origin of Cosmic Radiation. *The Physical Review*, **75** (8): 1169–1174.
- FERMI, E., 1954: Galactic Magnetic Fields and the Origin of Cosmic Radiation. *The Astrophysical Journal*, **119**: 1–6.
- FISK, L.A., Goldstein, M.L., Klimas, A.J., and Sandry, G., 1974: The Fokker-Planck Coefficient for Pitch Angle-Scattering of Cosmic Rays. *The Astrophysical Journal*, **190**: 417–428.
- FORSTER, O., 1984: *Analysis 2. 5.*, durchgesehene Auflage. Braunschweig, Wiesbaden: Friedr. Vieweg

& Sohn.

GERTHSEN, CH. UND VOGEL, H., 1995: *Physik*. 18., völlig überarbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

GOLDSTEIN, M.L., 1980: The Mean Free Path of Low-Rigidity Cosmic Rays. *Journal of Geophysical Research*, **85** (A6): 3033-3036.

GOMBOSI, T.I. AND OWENS, A.J., 1980: The Interplanetary Transport of Solar Cosmic Rays. *The Astrophysical Journal*, **241**: L129–L132.

GREEN, G., 1992: *Pitchwinkelverteilungen energiereicher geladener Teilchen: ihre Rekonstruktion aus sektorierten Intensitätsmessungen und ihre Bedeutung für die Untersuchung interplanetarer Ausbreitungsmechanismen*. Habilitationsschrift: 2., überarbeitete Auflage. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

GREEN, G., 1993: *Kosmische Elektrodynamik*. Vorlesungsskript. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

GREEN, G. AND SCHLÜTER, W., 1985: *The Local Characteristic Function of Interplanetary Particle Propagation*. "Gelbe Reihe". Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

GRÖBNER, W. UND HOFREITER, N., 1950: *Integraltafel*. Bd. 2. Wien, Innsbruck: Springer Verlag.

GROSSMANN, CH. UND ROOS, H.-G., 1994: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. 2., durchgesehene Auflage. Stuttgart: Teubner Studienbücher Mathematik.

HAMILTON, D.C., 1977: The Radial Transport of Energetic Solar Flare Particles from 1 to 6 AU. *Journal of Geophysical Research*, **82** (A16): 2157–2169.

HASSELMANN, K. AND WIBBERENZ, G., 1968: Scattering of Charged Particles by Random Electromagnetic Fields. *Zeitschrift für Geophysik*, **34**: 353–388.

HASSELMANN, K. AND WIBBERENZ, G., 1970: A Note on the Parallel Diffusion Coefficient. *The Astrophysical Journal*, **162**: 1049–1051.

HATZKY, R., 1993: *Systematische Analyse von Pitchwinkelverteilungen energiereicher Teilchen: am Beispiel der Raumsonde ULYSSES*. Diplomarbeit. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

HATZKY, R. AND WIBBERENZ, G., 1995: Pitch Angle Distribution of Solar Energetic Particles (SEPs) and the Transport Parameters in Interplanetary Space, II: Local Scattering Properties. *24th International Cosmic Ray Conference, Rome*, **4**: 265–268.

HATZKY, R., WIBBERENZ, G., AND BIEBER, J.W., 1995: Pitch Angle Distribution of Solar Energetic Particles (SEPs) and the Transport Parameters in Interplanetary Space, I: Properties of Steady-State Distribution. *24th International Cosmic Ray Conference, Rome*, **4**: 261–264.

HOCKNEY, R.W. AND EASTWOOD, J.W., 1988: *Computer Simulation Using Particles*. Bristol, New York: Adam Hilger.

HÖRMANDER, L., 1967: Hypoelliptic Second Order Differential Equations. *Acta Mathematica*, **119**:

147–171.

HÜBNER, K., 1982: *Einführung in die Plasmaphysik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

IL'IN, A.M., 1969: Differencing Scheme for a Differential Equation with a Small Parameter Affecting the Highest Derivative. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, **6**: 596–602 = *Mathemathicheskie Zametki*, **6** (2): 237–248.

IPAVICH, F.M., 1974: The Compton-Getting Effect for Low Energy Particles. *Geophysical Research Letters*, **1** (4): 149–152.

JACKSON, J.D., 1982: *Klassische Elektrodynamik*. Berlin, New York: de Gruyter.

JAECKEL, U. AND SCHLICKEISER, R., 1992: The Fokker-Planck Coefficients of Cosmic Ray Transport in Random Electromagnetic Fields. *Journal of Physics G, Nuclear Particle Physics*, **18**: 1089–1118.

JACOB, N., 1995: *Lineare partielle Differentialgleichungen*. Berlin: Akademie Verlag.

JOKIPII, J.R., 1966: Cosmic-Ray Propagation. I. Charged Particles in a Random Magnetic Field. *The Astrophysical Journal*, **146**: 480–487.

JOKIPII, J.R., 1968: Addendum and Erratum to “Cosmic-Ray Propagation. I.” *The Astrophysical Journal*, **152**: 671–672.

JONES, F.C., BIRMINGHAM, T.J., AND KAISER, T.B., 1978: Partially Averaged Field Approach to Cosmic Ray Diffusion. *Physics of Fluids*, **21**: 347–360.

JOOS, G.E. UND RICHTER, E.W., 1985: *Höhere Mathematik für den Praktiker*. 12., neubearbeitete Auflage. Thun, Frankfurt am Main: Harri Deutsch Verlag.

KALLENRODE, M.-B., 1989: *Injektion energiereicher Teilchen in solaren Flares*. Dissertation. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

KALLENRODE, M.-B., 1993: Particle Propagation in the Inner Heliosphere. *Journal of Geophysical Research*, **98** (A11): 19037–19047.

KALLENRODE, M.-B. AND WIBBERENZ, G., 1991: Particle Injection Following Solar Flares on 1980 May 28 and June 8: Evidence for Different Injection Time Histories and Impulsive and Gradual Events?. *The Astrophysical Journal*, **376**: 787–796.

KELLOG, R.B. AND TSAN, A., 1978: Analysis of Some Difference Approximations for a Singular Perturbation Problem Without Turning Points. *Mathematics of Computation*, **32** (144): 1025–1039.

KRAHMANN, G., 1991: *Streuung und Fokussierung geladener Teilchen im interplanetaren Magnetfeld*. Diplomarbeit. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

KÓTA, J., Merényi, E., Jokipii, J.R., Kopriva, D.A., Gombosi, T.I., and Owens, A.J., 1982: A Numerical Study of the Pitch-Angle Scattering of Cosmic Rays. *The Astrophysical Journal*, **254**: 398–404.

KUNOW, H., Wibberenz, G., Green, G., Müller-Mellin, R., Witte, M., and Hempe, H., 1975: Das Kieler Experiment zur Messung der kosmischen Strahlung zwischen 1,0 und 0,3 AE (E 6). *Raumfahrtforschung*, **19** (5): 253–258.

- KUNOW, H., WIBBERENZ, G., GREEN, G., HEMPE, H., IWERS, B., MÜLLER-MELLIN, R., WITTE, M., FÜCKNER, J., und POPP, A., 1981: *Ein Experiment zur Messung der kosmischen Strahlung an Bord der Sonnensonden HELIOS-1 und -2 (Experiment 6)*. Forschungsbericht BMFT-FB-W 81-016. Karlsruhe: Fachinformationszentrum.
- KUNOW, H., WIBBERENZ, G., GREEN, G., MÜLLER-MELLIN, R., and KALLENRODE, M.-B., 1991: Energetic Particles in the Inner Solar System. In: Schwenn, R. and Marsch, E. (Eds.): *Physics of the Inner Heliosphere II*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag: 243–342.
- KUNSTMANN, J.E., 1978A: On the Particle Number Conservation Inherent in the Diffusion Approach of the Fokker-Planck Equation. *Astrophysics and Space Science*, **56**: 81–87.
- KUNSTMANN, J.E., 1978B: Solutions of the Fokker-Planck Equation for the Early Time when the Diffusive Modes are not yet Valid. *Solar Physics*, **59**: 395–405.
- KUNSTMANN, J.E., 1979: A New Transport Mode for Energetic Charged Particles in Magnetic Fluctuations Superposed on a Diverging Mean Field. *The Astrophysical Journal*, **229**: 812–820.
- KUNSTMANN, J.E. AND ALPERS, W., 1977: A Perturbation Approach to Coherent Propagation of Energetic Charged Particles in Random Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal*, **211**: 587–595.
- LANDAU, L.D. UND LIFSCHITZ, E.M., 1989: *Klassische Feldtheorie*. Bd. 2. 11., unveränderte Auflage. Berlin: Akademie Verlag.
- LANDAU, L.D. UND LIFSCHITZ, E.M., 1991: *Hydrodynamik*. Bd. 6. 5., überarbeitete Auflage. Berlin: Akademie Verlag.
- LEE, M.A. AND VÖLK, H.J., 1975: Hydrodynamic Waves and Cosmic Ray Diffusion Theory. *The Astrophysical Journal*, **198**: 485–492.
- LEVEQUE, R.J., 1990: *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics, ETH Zürich. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag.
- MARCHUK, G.I., 1975: Methods of Numerical Mathematics. In: Balakrishnan, A.V. and Hildebrand, W. (Eds.): *Applications of Mathematics*. Bd. 2. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.
- MARSCH, E., TU, C.-Y., AND ROSENBAUER, H., 1996: Multifractional Scaling of the Kinetic Energy Flux in Solar Wind Turbulence. *Annales Geophysicae*, **14**: 259–269.
- MA SUNG, L.S. AND EARL, J.A., 1978: Interplanetary Propagation of Flare-Associated Energetic Particles. *The Astrophysical Journal*, **222**: 1080–1096.
- MATTHAEUS, W.H. AND GOLDSTEIN, M.L., 1982: Measurement of the Rugged Invariants of Magnetohydrodynamic Turbulence in the Solar Wind. *Journal of Geophysical Research*, **87** (A8): 6011–6028.
- MATTHAEUS, W.H., GOLDSTEIN, M.L., AND SMITH, C., 1982: Evaluation of Magnetic Helicity in Homogeneous Turbulence. *Physical Review Letters*, **48** (18): 1256–1259.
- MITCHELL, A.R. AND GRIFFITHS, D.F., 1980: *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. Chichester, New York, Brisbane, Toronto: John Wiley & Sons.
- NG, C.K., 1990: Numerical Solution of the Focused Transport Model. *21st International Cosmic Ray*

Conference, Adelaide, **5**: 208.

NG, C.K. AND GLEESON, L.J., 1971: The Propagation of Solar Cosmic-Ray Bursts. *Solar Physics*, **20**: 166–185.

NG, C.K. AND WONG, K.-Y., 1979: Solar Particle Propagation under the Influence of Pitch-Angle Diffusion and Collimation in the Interplanetary Magnetic Field. *16th International Cosmic Ray Conference, Kyoto*, **5**: 252–257.

NG, C.K. AND WONG, K.-Y., 1981: The Role of the Inner Boundary in Models of Focused Interplanetary Transport of Solar Particles. *Geophysical Research Letters*, **8** (1): 113–116.

NG, C.K., Wibberenz, G., Green, G., and Kunow, H., 1983: Absolute Value and Functional Dependence of Interplanetary Pitch Angle Scattering Derived from Helios Observations at 0.5 AU. *18th International Cosmic Ray Conference, Bangalore*, **16**: 381–383.

NG, C.K., Green, G., Schlüter, W., Wibberenz, G., and Kunow, H., 1989: Interplanetary Transport Conditions for the 1976 March 28 Solar Particle Event. unpublished paper.

OTAOLA, J.A. AND VALDÉS-GALICIA, J.F., 1995: A Study of the Magnetic Helicity during 8 Helios-Observed Solar Proton Events. *Solar Physics*, **160**: 41–52.

OWENS, A.J. AND GOMBOSI, T.I., 1980: Cosmic-Ray Scattering in Simulated Interplanetary Magnetic Field Fluctuations. *The Astrophysical Journal*, **235**: 1071–1077.

OWENS, A.J. AND GOMBOSI, T.I., 1981: The Inapplicability of Spatial Diffusion Models for Solar Cosmic Rays. *The Astrophysical Journal*, **245**: 328–334.

PALMER, I.D., 1982: Transport Coefficients of Low-Energy Cosmic Rays in Interplanetary Space. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, **20** (2): 335–351.

PALMER, I.D. AND JOKIPII, J.R., 1981: Monte-Carlo Model of Pitch-Angle Scattering in Solar Cosmic Ray Events. *17th International Cosmic Ray Conference, Paris*, **3**: 381–384.

PALMER, I.D., PALMEIRA, R.A.R., AND ALLUM F.R., 1975: Monte-Carlo Model of the Highly Anisotropic Solar Proton Event of 20 April 1971. *Solar Physics*, **40**: 449–460.

PARKER, E.N., 1958: Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal*, **128**: 664–676.

PAULS, H.L., 1994: *The Propagation of Charged Particles in a Focusing Magnetic Field with Random Components*. Ph. D. Thesis. Potchefstroom University Department of Physics.

PAULS, H.L. AND BURGER, R.A., 1994: Eigenfunction Solution of Boltzmann's Equation for the Case of a Focusing Magnetic Field with Finite Helicity. *The Astrophysical Journal*, **427**: 927–931.

PRESS, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., and Flannery, B.P., 1992: *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing (Fortran Version)*. 2nd ed. Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney: Cambridge University Press.

RAUMFAHRTFORSCHUNG, 1975: **19** (5).

- REID, G.C., 1964: A Diffusion Model for the Initial Phase of a Solar Proton Event. *Journal of Geophysical Research*, **69** (A13): 2659–2667.
- RICHTMYER, R.D. AND MORTON, K.W., 1967: *Difference Methods for Initial-Value Problems*. 2nd ed. New York: Interscience Publishers (John Wiley & Sons).
- ROACH, P.J., 1982: *Computational Fluid Dynamics*. 5th ed. Albuquerque, N.M.: Hermosa Publishers.
- ROE, P.L., 1986: Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, **18**: 337–365.
- ROEDERER, J.G., 1970: Dynamics of Geomagnetically Trapped Radiation. In: Roederer, J.G. and Zähringer, J. (Eds.): *Physics and Chemistry in Space*. Vol. 2. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.
- ROELOF, E.C., 1969: VII. Propagation of Solar Cosmic Rays in the Interplanetary Magnetic Field. In: Ögelman, H. and Wayland, J.R. (Eds.): *Lectures in High Energy Astrophysics*. NASA SP-199: 111–135.
- ROOS, H.-J., 1994: Ten Ways to Generate the Π 'in and Related Schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **53**: 43–59.
- ROSSI, B. AND OLBERT, S., 1970: *Introduction to the Physics of Space*. In: Schiff, L.I. (Ed.): *International Series in Pure and Applied Physics*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- RUFFOLO, D., 1991: Interplanetary Transport of Decay Protons from Solar Flare Neutrons. *The Astrophysical Journal*, **382**: 688–698.
- RUFFOLO, D., 1995: Effect of Adiabatic Deceleration on the Focused Transport of Solar Cosmic Rays. *The Astrophysical Journal*, **442**: 861–874.
- RUFFOLO, D. AND KHUMLUMLERT, T., 1995: Formation, Propagation and Decay of Coherent Pulses of Solar Cosmic Rays. *Geophysical Research Letters*, **22** (15): 2073–2076.
- SAMARSKIJ, A.A., 1984: *Theorie der Differenzenverfahren*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Porig K.-G.
- SCHLICKEISER, R., 1988: On the Interplanetary Transport of Cosmic Rays. *Journal of Geophysical Research*, **93** (A4): 2725–2729.
- SCHLICKEISER, R., 1989: Cosmic-Ray Transport and Acceleration. I. Derivation of the Kinetic Equation and Application to Cosmic Rays in Static Cold Media. *The Astrophysical Journal*, **336**: 243–263.
- SCHLÜTER, W., 1985: *Die numerische Behandlung der Ausbreitung solarer flareinduzierter Teilchen in den magnetischen Feldern des interplanetaren Raumes*. Dissertation. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.
- SCHMIDT, J.M. AND DRÖGE, W., 1996: Right- and Lefthanded, Forward- and Backward-Propagating Waves in the Solar Wind. *American Geophysical Union Fall Meeting, San Francisco*, SH31D-07.
- SCHWENN, R., 1991: Der Sonnenwind. In: Glaßmeier, K.-H. und Scholer, M. (Hrsg.): *Plasmaphysik*

im Sonnensystem. Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag: 17–46.

SCHWENN, R. AND MARSCH, E. (Eds.), 1990, 1991: *Physics of the Inner Heliosphere I, II*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

SMITH, C.W. AND BIEBER, J.W., 1993: Detection of Steady Magnetic Helicity in Low-Frequency IMF Turbulence. *23rd International Cosmic Ray Conference, Calgary*, **3**: 493–496.

SMITH, C.W., BIEBER, J.W., AND MATTHAEUS, W.H., 1990: Cosmic-Ray Pitch Angle Scattering in Isotropic Turbulence. II. Sensitive Dependence on the Dissipation Range Spectrum. *The Astrophysical Journal*, **363**: 283–291.

SMITH, G.D., 1985: Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. In: Curchouse, R.F., MacColl, W.F., and Taylor, A.B. (Eds.): *Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series*. 3rd ed. Oxford: Clarendon Press.

STEVENS, G.A. AND HOYNG, P., 1986: Generalized Compton-Getting Transformation for Nonrelativistic Particles. *Astronomy and Astrophysics*, **168**: 354–364.

SULLIVAN, J.D., 1971: Geometrical Factor and Directional Response of Single and Multielement Particle Telescopes. *Nuclear Instruments and Methods*, **95**: 5–11.

SCHULZE, B.M., RICHTER, A.K., AND WIBBERENZ, G., 1977: Influence of Finite Injections and of Interplanetary Propagation on Time-Intensity and Time-Anisotropy Profiles of Solar Cosmic Rays. *Solar Physics*, **54**: 207–228.

SWEBY, P.K., 1984: High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **21** (5): 995–1011.

TICHONOV, A.N. AND SAMARSKIJ, A.A., 1961: Homogeneous Difference Schemes. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **1** (1): 5–63 = *Zhurnal vy chislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, **1** (1): 1–57.

TU, C.-Y., MARSCH, E., AND THIEME, K.M., 1989: Basic Properties of Solar Wind MHD Turbulence Near 0.3 AU Analyzed by Means of Elsässer Variables. *Journal of Geophysical Research*, **94** (A9): 11739–11759.

VALDÉS-GALICIA, J.F., Wibberenz, G., Quenby, J.J., Moussas, X., Green, G., and Neubauer, F.M., 1988: Pitch Angle Scattering of Solar Particles: Comparison of 'Particle' and 'Field' Approach. *Solar Physics*, **117**: 135–156.

VAN LEER, B., 1977: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme IV. A New Approach to Numerical Convection. *Journal of Computational Physics*, **23**: 276–299.

VERNOV, S.N., Chudakov, A.E., Vakulov, P.V., Gorchakov, E.V., Kontor, N.N., Logachev, Yu.I., Lyubimov, G.P., Pereslegina, N.V., and Timofeev, G.A., 1970: Propagation of Solar and Galactic Cosmic Rays of Low Energies in Interplanetary Medium. In: Manno, V. and Page, D.E. (Eds.): *Intercorrelated Satellite Observations Related to Solar Events*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company: 53–89.

WANNER, W., 1993: *Solar Energetic Proton Scattering and the Spatial Structure of Magnetic Field Turbulence in the Inner Heliosphere*. Dissertation. Kiel: Institut für Reine und Angewandte Kernphysik.

- WANNER, W. AND WIBBERENZ, G., 1993: A Study of the Propagation of Solar Energetic Protons in the Inner Heliosphere. *Journal of Geophysical Research*, **98** (A3): 3513–3528.
- WARMING, R.F. AND HYETT, B.J., 1974: The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of Finite-Difference Methods. *Journal of Computational Physics*, **14**: 159–179.
- WEBB, G.M. AND GLEESON, L.J., 1979: On the Equation of Transport for Cosmic-Ray Particles in the Interplanetary Region. *Astrophysics and Space Science*, **60**: 335–351.
- WIBBERENZ, G., 1991: Die Kosmische Strahlung im Sonnensystem. In: Glaßmeier, K.-H. und Scholer, M. (Hrsg.): *Plasmaphysik im Sonnensystem*. Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag: 47–76.
- WIBBERENZ, G. AND GREEN, G., 1988: New Methods and Results in the Study of Interplanetary Propagation. In: Varga, A. and Somogyi, A.J. (Eds.): *11th European Cosmic Ray Symposium*. Invited Papers. Balatonfüred, Hungary.
- WIBBERENZ, G., HATZKY, R., AND BIEBER, J.W., 1996: Scattering Properties of the Interplanetary Medium Obtained from Angular Distributions of Solar Energetic Particles. In: Winterhalter, D., Gosling, J.T., Habbal, S.R., Kurth, W.S., and Neugebauer, M. (Eds.): *Solar Wind 8 Conference*: 260–263.
- WINDISCH, G., 1989: M-Matrices in Numerical Analysis. In: Kurke, H., Mecke, J., Thiele, R., Triebel, H., and Wechsung, G. (Eds.): *Teubner-Texte zur Mathematik*. Bd. 115. Leipzig: BSB Teubner.
- WINDISCH, G. AND SIEDOW, N., 1991: *Doubly Symmetric Matrices with Sinus-Periodic Eigenvectors*. Preprint, **5** (210). TU-Chemnitz: Fachbereich Mathematik.
- WONG, K.-Y., 1982: *Interplanetary Transport of Solar Particles in the Presence of Focusing and Pitch-Angle Diffusion*. M. Sc. Thesis. Kuala Lumpur: Department of Mathematics, University of Malaya.
- ZALESAK, S.T., 1979: Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids. *Journal of Computational Physics*, **31**: 335–362.
- ZHANG, L.D., 1995: A Reconciliation of the Discrepancy on the Cosmic-Ray Interplanetary Diffusion Mean Free Path. *The Astrophysical Journal*, **449**: 386–396.
- ZWICKL, R.D. AND WEBBER, W.R., 1977: Solar Particle Propagation from 1 to 5 AU. *Solar Physics*, **54**: 457–504.

Danksagung

Ich möchte an erster Stelle meinem wissenschaftlichen Lehrer Herrn Prof. Dr. G. Wibberenz für die interessante Themenstellung danken. Zu Beginn der Doktorandenzeit ist man besonders auf die Weitsicht seines wissenschaftlichen Lehrers angewiesen, insofern von einem geeigneten Thema, mit dem man sich immerhin einige Jahre seines Lebens beschäftigt, letztendlich das Gelingen einer Arbeit abhängt. Als Resultat meines Vertrauens halte ich nun meine Dissertation in Händen. Ich hatte das Privileg, mich ausschließlich meinen Studien widmen zu dürfen; auch hierfür möchte ich meinem wissenschaftlichen Lehrer ausdrücklich danken. Ich habe während dieser Zeit Herrn Prof. Dr. G. Wibberenz als einen Menschen schätzen gelernt, dessen Begeisterung für die Physik immer wieder ansteckend und motivierend war.

Frau Prof. Dr. M.-B. Kallenrode möchte ich dafür danken, daß sie trotz des eigenen täglichen Arbeitspensums immer bereit gewesen ist, den Fortgang meiner Arbeit mit regem Interesse zu verfolgen. Sie mußte sich dabei so manche unausgelegene Idee anhören, die sich nicht immer zu einem neuen Gedankengang ausbauen ließ. Es ist aber wichtig, daß Ideen reifen können, und dazu gehört, daß man den Gedanken zunächst ausformulieren und einer sachkundigen Person vortragen kann, die sich die Zeit nimmt, zuzuhören.

Manchmal ist dies leider nicht auf persönlichem Wege möglich. Ich habe mit Herrn Dr. David Ruffolo weit über hundert E-Mails über den Computer ausgetauscht, da sich sein Arbeitsplatz an der Chulalongkorn Universität Bangkok, Thailand, befindet. Trotz dieser großen geographischen Distanz hat sich eine fruchtbare Zusammenarbeit entwickelt, die auf gegenseitigem Vertrauen basiert. Ich bin Dr. David Ruffolo zu aufrichtigem Dank verpflichtet dafür, daß er bereit gewesen ist, mit mir seine Arbeiten derart ausführlich zu diskutieren.

Ein weiterer Kontakt zu einem Wissenschaftler über tausende von Kilometern hat sich über meinen wissenschaftlichen Lehrer zu Herrn Dr. J. W. Bieber am Bartol Research Institute of the University of Delaware in Newark, USA, ergeben. Ohne die Vorveröffentlichung einer seiner Arbeiten wäre meine Arbeit in eine andere Richtung gegangen und damit auch auf weniger Aufmerksamkeit innerhalb der eigenen Gruppe gestoßen. Ich danke Herrn Dr. J. W. Bieber dafür, daß er mit einem Neuling, wie ich einer gewesen bin, seine Gedanken geteilt hat.

Als sehr hilfreich erweist es sich immer, seine wissenschaftlichen Gedanken mit einem theoretischen Physiker diskutieren zu können. Sowohl Dipl.-Phys. Meinhard Kneller aus auch Dr. Joachim Schmidt waren immer bereit, mich an ihrem fundierten theoretischen Wissen teilhaben zu lassen. Dabei habe ich besonders mit Joachim Schmidt über sehr abstrakte Zusammenhänge gesprochen, die sich häufig genug auch auf andere Gebiete als nur auf die Physik ausgeweitet haben.

Weiteren Beistand habe ich bei den Mathematikern gefunden, die sich nicht gescheut haben, auch einem Physiker zuzuhören und in der Problematik der Anwendung Rat zu erteilen. Besonders möchte ich dabei Herrn Dipl.-Math. Jens Burmeister hervorheben. Er hat sich sehr darum bemüht, sein Wissen in der Numerik partieller Differentialgleichungen mitzuteilen, und dabei versucht, auch die physikalischen Aspekte eines Problems nicht aus den Augen zu verlieren. Über ihn erhielt ich eine Einladung zu einem Vortrag im Oberseminar der Arbeitsgruppe um Herrn Prof. Dr. W. Hackbusch, die ich gerne angenommen habe.

Die Herren Prof. Dr. D. Müller, Dr. habil. G. Windisch und Prof. Dr. H. König waren ebenfalls bereit, mir zuzuhören und mich zu unterstützen. Sie haben dabei einen Beitrag zum

interdisziplinären Gedankenaustausch geleistet, für den ich ihnen dankbar bin.

Da ich die Daten eines Experimentes ausgewertet habe, das schon vor vielen Jahren gestartet worden ist, will ich die Personen nicht ungenannt lassen, die dieses Experiment erst ermöglicht haben. Ich möchte dabei besonders der Kieler Gruppe um den technischen Leiter Herrn Dipl.-Phys. H. Kunow danken. Dabei ist es ohne Bedeutung, ob ich die Personen persönlich kennengelernt habe oder nicht. Das gleiche gilt für die Gruppe um Herrn Prof. Dr. F. Neubauer der Universität Braunschweig, deren Magnetfelddaten ich verwendet habe, und für Herrn Dr. habil. R. Schwenn, der uns freundlicherweise die Plasmadaten zur Verfügung gestellt hat.

Und da eine wissenschaftliche Gruppe nicht nur aus einer funktionstüchtigen technischen Abteilung besteht, möchte ich mich ausdrücklich auch bei all den anderen Mitgliedern meiner Arbeitsgruppe bedanken, die mir mit wissenschaftlichem Rat zur Seite gestanden und mir in den praktischen Dingen des Alltags geholfen haben.

Ganz besonderen Dank möchte ich Dipl.-Phys. Ole Vanhöfer für seine tatkräftige Unterstützung aussprechen. Ich konnte mich immer vollständig auf ihn verlassen und bin der Überzeugung, daß er für zukünftige Arbeitgeber einen Gewinn darstellt.

Meinem Freund Dipl.-Ing. Malte Bitterling möchte ich für die Geduld danken, mit der er sich während der gemeinsamen Mittagessen die Tücken der Numerik angehört hat. Jeder, der selbst programmiert hat, weiß, wie erbarmungslos Computer sein können und wie schön es ist, sich mit Menschen dagegen zu solidarisieren.

Mein Dank gilt ebenso meinem Freund Dipl.-Phys. Jan-Peter Schulz und meiner Frau Anja, die mich während des Schreibens sehr unterstützt haben und bereit waren, mit mir den Kampf gegen die Tippfehler aufzunehmen.

Last but not least möchte ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft dafür danken, daß sie meine Arbeit aus dem Projekt Wi 259/8 unterstützt hat. Ich hoffe, daß die Grundlagenforschung auch in Zukunft von der Gesellschaft gefördert wird, da diese einen wesentlichen Beitrag zum kulturellen Fortschritt unseres Landes leistet.